

CVIČENÍ 1

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako “známá tvrzení”)

Věta 1. Nechť P a Q jsou metrické prostory, $f, g: P \rightarrow Q$ jsou spojitá zobrazení a $M \subset P$ je hustá v P . Jestliže $f = g$ na M , pak $f = g$ na celém P .

Věta 2. Nechť (P, ρ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak funkce $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ je 1-Lipschitzovská na P .

Věta 3. Součin $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ úplných metrických prostorů X_1, \dots, X_n je též úplný.

2. Konkrétnější příklady

a) Nechť je dána posloupnost $(f_n)_{n=1}^\infty$ v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ předpisem

$$f_n(k) := \frac{k+1}{k^2+2} + \frac{n+1}{n^2k}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{c_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_\infty\}$. Zjistěte, zda $f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X . Dále zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachových prostorech c_0 a ℓ_∞ (a pokud ano, určete její limitu).

b) Nechť je dána posloupnost funkcí $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ předpisem

$$f_n(x) := \frac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{n^2}{(n^2 - 1 + e^x)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in [0, 1].$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{C([0, 1]), L_1([0, 1]), L_2([0, 1]), L_3([0, 1]), L_\infty([0, 1])\}$. Zjistěte, zda $f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X . Pokud ano, zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachově prostoru X (a pokud ano, určete její limitu).

c) Nechť $Y \subset L_1([0, 1])$ je množina daná předpisem

$$Y := \{f \in L_1([0, 1]): \int_0^1 tf(t) dt = 0\}.$$

Určete, zda Y je uzavřený podprostor $L_1([0, 1])$ a pokud ano, zda má nekonečnou dimenzi.

d) Nechť $Y \subset \ell_2$ je množina daná předpisem

$$Y := \{x \in \ell_2: \sum_{n=1}^7 x_n = 0\}.$$

Určete, zda Y je uzavřený podprostor ℓ_2 a pokud ano, zda má nekonečnou dimenzi.

e) Nechť je dána posloupnost $(f_n)_{n=1}^\infty$ v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ předpisem

$$f_n(k) := \frac{e^n + k}{e^n \cdot k^3}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{c_0, \ell_1\}$. Zjistěte, zda $f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X . Pokud ano, zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachově prostoru X (a pokud ano, určete její limitu).

f) Nechť je dána posloupnost reálných funkcí $f_n, n \in \mathbb{N}$ předpisem

$$f_n(x) := \frac{\log(nx)}{\sqrt{x}}, \quad n \in \mathbb{N}, x > 0.$$

Uvažujte postupně Banachovy prostory $X \in \{C([1, 2]), L_1([0, 1])\}$. Zjistěte, zda $f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou prvky Banachova prostoru X . Pokud ano, zjistěte zda je posloupnost f_n konvergentní v Banachově prostoru X (a pokud ano, určete její limitu).

CVIČENÍ 2

1. Teoretičtější příklady, které by ale studenti opravdu měli ovládat

- a) Nechť X je normovaný lineární prostor. Ukažte, že $B(x, r) = x + B(0, r)$ a $B(0, r) = rB(0, 1)$.
 b) Ukažte, že $B(x, r)$ a $U(x, r)$ jsou konvexní množiny.
 c) Nechť X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} , $M \subset X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Ukažte, že $\overline{\alpha M} = \alpha \overline{M}$.
 d) Ukažte, že v normovaném lineárním prostoru platí $\overline{U(x, r)} = B(x, r)$, $\text{Int } B(x, r) = U(x, r)$ a $\partial U(x, r) = \partial B(x, r) = S(x, r)$. Naleznete příklad metrického prostoru, kde tyto rovnosti neplatí.

2. Další teoretičtější příklady

- a) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory ℓ_p a ℓ_q pro $p < q$? Jaký je jejich vztah k prostoru c_0 ?
 b) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p([0, 1])$ a $L_q([0, 1])$ pro $p < q$?
 c) Jaký je množinový vztah mezi vektorovými prostory $L_p(\mathbb{R})$ a $L_q(\mathbb{R})$ pro $p < q$?
 d) Dokažte následující tvrzení (až jej dokážete, je možné je používat jako "známé tvrzení")

Věta 4. Nechť (P, ρ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f : M \rightarrow Q$ je stejnoměrně spojitě zobrazení. Pak existuje spojitě rozšíření f na celé P . Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojitě.

3. Ukažte, že $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$ je spojitý lineární funkcional, spočtete jeho normu a zjistete, zda φ své normy nabývá, jestliže

- a) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$; b) $X = c_0$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$;
 c) $X = C([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t) dt$; d) $X = L_{\infty}([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t) dt$;
 e) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$; f) $X = \ell_1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) x_{2n}$;
 g) $X = C([0, 1])$, $\varphi(f) = f(0) - f(1)$; h) $X = L_{\infty}([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t) dt$;
 i) $X = \ell_2$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$; j) $X = L_1([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t) dt$; ;
 k) $X = \ell_p$ (kde $p \in (1, \infty)$), $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$; l) $X = L_1([0, 1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t) dt$.

VÝSLEDKY

- 3.** a) $\|\varphi\| = 1$, normy se nabývá b) $\|\varphi\| = 1$, normy se nenabývá c) $\|\varphi\| = \frac{1}{4}$, normy se nenabývá d) $\|\varphi\| = \frac{1}{4}$, normy se nabývá
 e) $\|\varphi\| = 1$, normy se nabývá f) $\|\varphi\| = 1$, normy se nenabývá g) $\|\varphi\| = 2$, normy se nabývá
 h) $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá i) $\|\varphi\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$, normy se nabývá j) $\|\varphi\| = 1$, normy se nenabývá k) $\|\varphi\| = \sqrt[q]{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}}$, normy se nabývá
 l) $\|\varphi\| = \frac{1}{2}$, normy se nenabývá

CVIČENÍ 3

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako “známé tvrzení”)

Věta 5. Necht K je kompaktní metrický prostor. Pak prostor $C(K)$ je separabilní.

2. Ukažte, že $T : X \rightarrow Y$ je spojitý lineární operátor, spočtete jeho normu a zjistete, zda existuje $x \in S_X$ splňující $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zkoumejte následující otázky:

- Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistete jeho jádro.
- Je operátor T na?
- Je operátor T izometrie, případně izomorfismus? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtete normu inverzního operátoru.

(Jako vzorové se dají vzít řešené příklady [2, příklady 1.2.6 (a), (d)-(g)])

- a) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots)$; b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$;
c) $X = Y = \ell_3$, $T((x_n)) = ((-1)^n \frac{x_n}{2^n})_{n=1}^\infty$; d) $X = Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{2n^2+n+1}{n^2+5n} x_n)_{n=1}^\infty$;
e) $X = \ell_1$, $Y = \ell_\infty$, $T((x_n)) = (x_1 + \dots + x_n)_{n=1}^\infty$;
f) $X = Y = C([0, 1])$, $Tf = f + f(1) - f(0)$;
g) $X = Y = C([0, 1])$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$;
h) $X = Y = C([-1, 1])$, $Tf(t) = f(t^2)$;
i) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (2x_1 + 3x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, \dots)$ (technicky náročnější).

3. Další vhodné příklady:

[1, příklady 1, 2, 3 (a)-(q) - některé z nich použity výše]

[2, příklady 1.2.6 (a)-(g), 1.2.11 (a)-(i)]

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf>

[2] sbírka řešených příkladů z webu:

<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf>

VÝSLEDKY

- 2.** a) T je izometrie na b) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, není prostý a není na, $\ker T = \{x : x(2n) = 0, n \in \mathbb{N}\}$, není izomorfismus c) $\|T\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá, je prostý a není na, není izomorfismus d) $\|T\| = 2$, normy se nenabývá, T je izomorfismus na, $\|T^{-1}\| = \frac{3}{2}$ e) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T je prosté, není na, není izomorfismus
f) $\|T\| = 3$, normy se nabývá, T je prostý a na, je izomorfismus, $\|T^{-1}\| = \frac{1}{3}$. g) $\|T\| = \frac{1}{2}$, normy se nabývá, T je prostý a není na, není izomorfismus. h) $\|T\| = 1$, normy se nabývá, T není prostý a není na, $\ker T = \{f : f|_{[0,1]} \equiv 0\}$.
i) $\|T\| = \sqrt{\frac{15+5\sqrt{5}}{2}}$, normy se nabývá, T je izomorfismus na, $\|T^{-1}\| = \frac{1}{5}\|T\|$.

CVIČENÍ 4

1. Teoretičtější příklady

a) Dokažte následující tvrzení (až je dokážete, je možné je používat jako “známé tvrzení”)

Věta 6. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je lebesgueovskly měřitelná množina a $p \in [1, \infty)$. Pak $C_c(\Omega)$ je hustá podmnožina $L_p(\Omega, \lambda)$, kde

$$C_c(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ je spojitá a } \{f \neq 0\} \text{ je omezená}\}$$

Věta 7. Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je lebesgueovskly měřitelná množina a $p \in [1, \infty)$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.

2. Ukažte, že $T : X \rightarrow Y$ je dobře definovaný spojitý lineární operátor

a) $X = L_1([0, 2])$, $Y = L_1([0, 2])$, $Tf(t) = \int_0^1 f(s)ds + f(t)$

b) $X = C([0, 1])$, $Y = L_2([0, 1], \sin t d\lambda)$, $Tf(t) = \sqrt{t}f(t)$

c) $X = C([0, 1])$, $Y = c_0$, $Tf = (f(\frac{1}{n}) - f(0))_{n=1}^\infty$

3. Ukažte, že $T : X \rightarrow Y$ je spojitý lineární operátor, spočtete jeho normu a zjistete, zda existuje $x \in S_X$ splňující $\|Tx\| = \|T\|$. Dále zkoumejte následující otázky:

- Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistete jeho jádro.
- Je operátor T na?
- Je operátor T izometrie, případně izomorfismus? Pokud ano, popište jeho obor hodnot a spočtete normu inverzního operátoru.

a) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$; b) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $Tf(t) = (t - \frac{1}{2})f(t)$.

c) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $Tf = \chi_{[0, \frac{1}{2}]} \cdot f$

4. Vyšetřete, pro která $k \in \mathbb{Z}$ je $T : X \rightarrow Y$ dobře definovaný spojitý lineární operátor

a) $L_3([0, 5])$, $Y = L_1([0, 5]^2)$, $Tf(x, y) = \frac{f(x)}{(xy)^k}$; b) $X = C([-\pi, \pi])$, $Y = \mathbb{R}$, $T(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\sin t)^k dt$

c) $X = L_2([0, 1])$, $Y = \mathbb{R}$, $Tf = \int_0^1 x^k f(x) dx$

5. Další vhodné příklady:

a) počítací viz. [1, příklady (u), (w)-(z) z oddílů 3 a 4] (některé použity výše)

b) [2, příklady ze sekce 1.2]

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-normy.pdf>

[2] sbírka řešených příkladů z webu:

<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf>

VÝSLEDKY

3. a) viz. [2, řešený příklad I.2.6(j)] b) $\|T\| = \frac{1}{2}$, normy se nabyde právě když $p = \infty$, je prosté a není na, není izomorfismus c) $\|T\| = 1$, normy se nabyde, T není prostý a není na, $\ker T = \{f \in L_p([0, 1]) : f|_{[0, \frac{1}{2}]} \equiv 0\}$, T není izomorfismus.

4. a) pro $k \leq 0$ b) pro $k \geq 0$ c) pro $k \geq 0$

Zadání zápočtové písemky z minulých let (slouží jako vzor toho, jak může zápočtová písemka vypadat):

Příklad 1:(6 bodů) Které z následujících funkcí $T : C([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1])$ jsou spojité a lineární? Své tvrzení dokažte.

1. $Tf = f$ pro $f \in C([0, 1])$;
2. $Tf = f^3$ pro $f \in C([0, 1])$;
3. $Tf(t) = f(t^3)$ pro $f \in C([0, 1])$ a $t \in [0, 1]$.

Příklad 2:(6 bodů) Necht' je dáno zobrazení $T : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ definované předpisem

$$Tx = \left(\int_0^1 x_n t^n dt \right)_{n=1}^{\infty}, \quad x \in \ell_1.$$

1. Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
2. Určete normu operátoru T .
3. Zjistěte, zda je T izomorfismus do.

Příklad 3:(8 bodů) Necht' je dáno zobrazení $T : L_1([0, 1]) \rightarrow L_1([0, 1], t dt)$ definované předpisem

$$Tf(t) = (t + 2)f(t), \quad f \in L_1([0, 1]), t \in [0, 1].$$

1. Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
2. Určete normu operátoru T .
3. Zjistěte, zda je T izomorfismus do.

VÝSLEDKY

Příklad 1: 1. ano, 2. ne, 3. ano

Příklad 2: $\|T\| = \frac{1}{2}$, není isomorfismus do

Příklad 3: $\|T\| = 3$, není isomorfismus do

CVIČENÍ 5

Na cvičení se psala zápočtová písemka. Její zadání je níže.

V příkladech níže uvažujte všechny prostory nad tělesem reálných čísel.

Příklad 1:(3 body) Které z následujících funkcí jsou dobře definované, lineární a spojité operátory z c_0 do ℓ_4 ? Svě tvrzení dokažte.

1. $Tx = (x_1^2, 0, 0, 0, \dots)$ pro $x \in c_0$;
2. $Tx = (x_1 + x_2, 0, 0, 0, \dots)$ pro $x \in c_0$;
3. $Tx = x$ pro $x \in c_0$.

Příklad 2:(5 bodů) Nechť je dáno zobrazení $T : C([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \rightarrow \mathbb{R}$ definované předpisem

$$Tf = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \sin t \, dt, \quad f \in C([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]).$$

1. Dokažte, že se jedná o spojité lineární operátor.
2. Určete normu operátoru T .
3. Zjistěte, zda T nabývá své normy.

Příklad 2:(6.5 bodů) Nechť je dáno zobrazení $T : L_1([1, \infty)) \rightarrow L_1([1, \infty), e^{-t^2} dt)$ definované předpisem

$$Tf(t) = tf(t), \quad f \in L_1([1, \infty)), \quad t \geq 1.$$

1. Dokažte, že se jedná o spojité lineární operátor.
2. Zjistěte, zda je T prostý.
3. Zjistěte, zda je T na.
4. Zjistěte, zda je T izomorfismus do.

(Pozor: v zadání není stejná míra na definičním oboru a oboru hodnot zobrazení T .)

Příklad 2:(5.5 bodů) Nechť je dáno zobrazení $T : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ definované předpisem

$$Tx = (-x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_4 - x_3, \dots), \quad x \in \ell_\infty.$$

1. Dokažte, že se jedná o spojité lineární operátor.
2. Zjistěte, zda je T prostý.
3. Zjistěte, zda je T na.
4. Zjistěte, zda je T izomorfismus do.

CVIČENÍ 6

1. V následujícím příkladě je dán Hilbertův prostor H , jeho uzavřený podprostor Y a bod $x_0 \in H$. Najděte nějakou ortonormální bázi Y , napište vzorec pro ortogonální projekci na Y a najděte nejbližší bod v Y k bodu x_0 .

- a) $H = \mathbb{C}^4$, $Y = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^3 : x_2 = ix_1, x_4 = (1+i)x_3\}$, $x_0 = (1, i, 1, 1)$.
 b) $H = L_2([0, 1])$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = e^t$.
 c) $H = L_2((0, \infty), e^{-t} dt)$, Y podprostor tvořený polynomy stupně nejvýše 2, $x_0(t) = t^5$.
 d) $H = \ell_2$, $Y = \text{span}\{(2^{-n})_{n=1}^\infty, (3^{-n})_{n=1}^\infty\}$, $x_0 = e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$.

2. Další vhodné příklady:

- e) [1, příklady 1-7] (některé použity výše)
 f) [2, příklady ze sekce 1.4] (některé použity výše)

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-projekce.pdf>

[2] sbírka řešených příkladů z webu:

<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf>

VÝSLEDKY

1. a) ON báze Y je například $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0, 0), (0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1+i}{\sqrt{3}})\}$. OG projekce je $P(x_1, \dots, x_4) = (\frac{1}{2}(x_1 - ix_2), \frac{1}{2}(ix_1 + x_2), \frac{1}{3}x_3 + \frac{1-i}{3}x_4, \frac{1+i}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4)$, nejbližší bod je $(1, i, \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i, 1 + \frac{1}{3}i)$.
 b) ON báze Y je například $\{1, 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}, \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})\}$, OG projekce má tvar $P(f)(x) = 180(x^2 - x + \frac{1}{6}) \cdot \int_0^1 t^2 f(t) dt - (180x^2 - 192x + 36) \cdot \int_0^1 t f(t) dt + (30x^2 - 36x + 9) \cdot \int_0^1 f(t) dt$, nejbližší bod je $(210e - 570)x^2 + (588 - 216e)x + 39e - 105$
 c) ON báze Y je například $\{1, x - 1, \frac{x^2}{2} - 2x + 1\}$, OG projekce je dána vzorcem $P(f)(x) = (\frac{x^2}{4} - x + \frac{1}{2}) \cdot \int_0^\infty t^2 f(t)e^{-t} dt + (-x^2 + 5x - 3) \cdot \int_0^\infty t f(t)e^{-t} dt + (\frac{x^2}{2} - 3x + 3) \cdot \int_0^\infty f(t)e^{-t} dt$, nejbližší bod je $f(x) = 600x^2 - 1800x + 720$.
 d) ON báze Y je například $\{\sqrt{3}(2^{-n})_{n=1}^\infty, \sqrt{200}(3^{-n} - \frac{3}{5}2^{-n})_{n=1}^\infty\}$, $Pe_1 = (\frac{20}{3}3^{-n} + \frac{9}{10}2^{-n})_{n=1}^\infty$

CVIČENÍ 7

1. Ukažte, že $T \in L(X, Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in L(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů. V případě, že X a Y jsou Hilbertovy, vyjádřete také hilbertovsky adjungovaný operátor T^* .

a) $X = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (ix_1 - x_3, (1+i)x_2)$;

b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1, ix_2, x_3, ix_4, \dots)$;

c) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \dots)$;

d) $X = Y = \ell_1$, $T((x_n)) = (\frac{2}{1}x_2 - \frac{1}{2}x_1, \frac{3}{2}x_4 - \frac{2}{3}x_3, \dots, \frac{n+1}{n}x_{2n} - \frac{n}{n+1}x_{2n-1}, \dots)$;

e) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty)$, $Tf = \chi_{[0, \frac{1}{2}]} \cdot f$;

f) $X = Y = L_2([0, 1])$, $Tf(t) = \int_0^1 \min(s, t)f(s) ds$ (Pozor: zde je asi nejtěžší důkaz omezenosti operátoru T);

g) $X = L_1((0, \infty))$, $Y = L_1((0, \infty))$, $e^{-t} dt$, $Tf(t) = f(2t)$;

h) $X = \ell_2$, $Y = L_2(1, \infty)$, $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{(n, n+1)}$.

2. Další vhodné příklady:

i) [1, příklady 1 a 2 (a)-(m)] (některé použity výše)

j) [2, Příklad 1 (a)-(e) a Příklad 2 (a)-(e) ze sekce 4.1] (některé použity výše)

[1] materiály prof. Kalendy, umístěny na webu zde:

<https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-dualniop.pdf>

[2] sbírka řešených příkladů z webu:

<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf>

VÝSLEDKY

1. a) $T^*(y_1, y_2) = (iy_1, (1+i)y_2, -y_1)$, $T^*(y_1, y_2) = (-iy_1, (1-i)y_2, -y_1)$

b) $T^*y = (y_1, iy_2, y_3, iy_4, \dots)$, $T^*y = (y_1, -iy_2, y_3, -iy_4, \dots)$

c) $T^*y = T^*y = (y_1 - 2y_2, y_2 - y_1, y_3, y_4, \dots)$ d) $T^*y = (-\frac{1}{2}y_1, \frac{2}{1}y_2, -\frac{2}{3}y_3, \frac{3}{2}y_4, \dots, -\frac{n+1}{n}y_{2n-1}, \frac{n+1}{n}y_{2n}, \dots)$

e) $T^*g = \chi_{[0, \frac{1}{2}]} \cdot g$ pro $g \in L_q([0, 1])$ a pro $p = 2$ máme $T^*g = T^*g$ f) $T = T^* = T^*$

g) $T^*g(s) = \frac{1}{2}g(s/2)e^{-s/2}$ h) $T^*f = \left(\int_n^{n+1} f(t) dt \right)_{n=1}^{\infty}$

CVIČENÍ 8

1. Ukažte, že $T \in L(X, Y)$ a vyjádřete duální operátor $T^* \in L(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.

- a) $X = Y = C([-1, 1])$, $Tf(t) = f(t^2)$; b) $X = Y = C([0, 1])$, $Tf(t) = f + f(1) - f(0)$;
 c) $X = C([0, 1])$, $Y = L_2([0, 1], \sin t \, d\lambda)$, $Tf(t) = \sqrt{t}f(t)$; d) $X = Y = L_1([0, 2])$, $Tf = \int_0^1 f(s)ds + f(t)$;
 e) $X = \ell_1$, $Y = C([0, 1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0, 1]$;
 f) $X = C([0, 1])$, $Y = c_0$, $Tf = (f(\frac{1}{n}) - f(0))_{n=1}^{\infty}$; g) $X = \ell_1$, $Y = L_3([0, 1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$, $t \in [0, 1]$;
 h) $T : L_2([1, \infty)) \rightarrow c_0$, $Tf = \left(\int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t^n} dt \right)_{n=1}^{\infty}$ (Pozor: nejprve je třeba dokázat, že $Tf \in c_0$ a že je spojitý)
 i) $X = L_1([0, 1])$, $Y = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $Tf = \left(\int_0^1 t f(t) dt, \int_0^1 \cos(t) f(t) dt \right)$

VÝSLEDKY

1. a) $T^*\mu = \varphi_{\#}\mu$, kde $\varphi(t) = t^2$ b) $T^*\mu = \mu + \mu([0, 1])(\delta_1 - \delta_0)$ c) $T^*f = \sqrt{t}f(t) \sin t \, d\lambda$ d) $T^*g = g + \chi_{[0,1]} \int_0^2 g(s) ds$
 e) $T^*\mu = \left(\int_0^1 t^i d\mu(t) \right)_{i=1}^{\infty}$ f) $T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (\delta_{1/n} - \delta_0)$ (sumou se rozumí absolutně konvergentní řada v prostoru $M([0, 1])$)
 g) $T^*g = \left(\int_0^1 t^i g(t) d\lambda(t) \right)_{i=1}^{\infty}$ h) $T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{t^n}$ (sumou se rozumí absolutně konvergentní řada v prostoru L_2)
 i) $T^*x(t) = x_1 t + x_2 \cos t$

Další vhodné příklady:

- příklady ze zkuškových písemek na hledání adjungovaného operátoru, dostupné na webu prof. Spurného, často včetně řešení (<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ufa.php> a <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/fa-letto.php>)
- vznikající skripta řešených příkladů (viz. <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf>)
- příklady ze zkuškových písemek z VPFA (viz. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/VPFA/2021_22/VPFA_zkPisWeb.pdf)

CVIČENÍ 9

1. Určete, zda je operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ kompaktní

- a) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$;
b) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots)$; c) $X = Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{1}{n}x_n)_{n=1}^\infty$;
d) $X = Y = L_p([0, 1])$, kde $p \in [1, \infty)$, $Tf(t) = tf(t)$; e) $X = Y = C([0, 1])$, $T(f)(t) = \int_0^1 f(s)\sqrt{1+t+s^2} ds$;

f) $X = Y = \ell_2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, 2x_2 - x_1, x_3, x_4, \dots)$; g) $X = \ell_{3/2}$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{x_1 + \dots + x_{2n}}{\sqrt{n}})_{n=1}^\infty$;

h) $X = Y = C([0, 1])$, $T(f) = f - f(0) + 5f(1)$; i) $X = C([0, 1])$, $Y = c_0$, $Tf = (f(\frac{1}{n}) - f(0))_{n=1}^\infty$;

j) $X = Y = L_1([0, 2])$, $Tf(t) = \int_0^1 f(s)ds + f(t)$; k) $X = c_0$, $Y = C([0, 2\pi])$, $Tx(t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{2^n} \cos(nt)$;

l) $X = Y = L_2([0, 1])$, $Tf(t) = \int_0^1 \min(s, t)f(s) ds$

(Hint: Uvažujte operátory $A : L_2([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ a $B : C([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1])$, kde A je dáno stejným předpisem jako T a B je "identita" (přesněji: $Af(t) = \int_0^1 \min(t, s)f(s) ds$ a $Bf = [f]$). Ukažte, že A a B jsou lineární, spojité a s pomocí Arzela-Ascoliho věty ukažte, že A je kompaktní. Na závěr použijte identitu $T = B \circ A$.)

VÝSLEDKY

1. a) ano (aplikujeme metodu (ii)); b) ne (aplikujeme metodu (i)); c) ano (aplikujeme metodu (ii)); d) ne (aplikujeme metodu (iii)); e) ano (aplikujeme metodu (iv)); f) ne (aplikujeme metodu (i)); g) ano (aplikujeme metodu (ii)); h) ne (aplikujeme metodu (iii)); i) ne (aplikujeme metodu (i)); j) ne (aplikujeme metodu (iii)); k) ano (aplikujeme metodu (ii));

Další vhodné příklady:

- příklady ze zkouškových písemek na vyšetření, zda je operátor kompaktní: dostupné na webu prof. Spurného, často včetně řešení (<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/ufa.php> a <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/fa-letu.php>), příklady ze zkouškových písemek z VPFA (viz. https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/VPFA/2021_22/VPFA_zkPisWeb.pdf)
- vznikající skripta řešených příkladů (viz. <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/fa-priklady.pdf>)
- materiály prof. Kalendy (viz. <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-kompakt.pdf>)

CVIČENÍ 10

Na cvičení se psala zápočtová písemka. Její zadání je níže.

Příklad 1: Je dán Hilbertův prostor $H = \mathbb{C}^3$, jeho uzavřený podprostor

$$Y := \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 + ix_2 - ix_3 = 0\}$$

a bod $x_0 = (1, 1, i)$. Najděte nějakou ortonormální bázi Y , napište vzorec pro ortogonální projekci na Y a najděte nejbližší bod v Y k bodu x_0 .

V příkladech níže uvažujte všechny prostory nad tělesem reálných čísel.

Příklad 2: Nechť je dáno $T : C([0, 1]) \rightarrow \ell_1$ předpisem

$$Tf = \left(\frac{f(\frac{1}{n})}{2^n} \right)_{n=1}^{\infty}, \quad f \in C([0, 1]).$$

Dokažte, že T je dobře definovaný spojitý operátor, zjistěte, zda je T kompaktní a vyjádřete duální operátor T^* pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.

Příklad 3: Nechť je dáno $T : L_3([0, \pi]) \rightarrow L_3([0, \pi])$ předpisem

$$Tf(x) = f(x) + \sin x \left(\int_0^{\pi} f(t) \cos t \, dt \right) + \cos x \left(\int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt \right), \quad f \in L_3([0, \pi]).$$

Dokažte, že T je dobře definovaný spojitý operátor, zjistěte, zda je T kompaktní a vyjádřete duální operátor T^* pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.

1. Pro následující operátory ukažte že $T \in \mathcal{L}(X)$ a určete $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$.

a) $X = \ell_1$, $T(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1}, \dots)$;

(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem komplexních čísel)

b) $X = C([0, 1])$, $Tf(t) = f(t) + f(1) - f(0)$; c) $X = L_1([0, 1])$, $Tf(t) = 2f(t) + t \int_0^1 f(x) dx + t^2 \int_0^1 xf(x) dx$;

d) $X = c_0$, $T(x) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, x_3, \frac{1}{4}x_4, x_5, \frac{1}{6}x_6, \dots)$; e) $X = L_3([0, 1])$, $Tf(t) = t^2 f(t)$;

f) $X = \ell_2$, $T((x_n)) = (-x_2, x_1, -\frac{1}{2}x_4, x_3, -\frac{1}{3}x_6, x_5, \dots)$;

(v tomto příkladu uvažujte pouze prostory nad tělesem komplexních čísel)

g) $X = C([0, 1])$, $Tf(t) = f(t) + tf(1)$; h) $X = L_1((0, \infty), e^{-t} dt)$, $Tf(x) = f(x) + x^2 \int_0^\infty f(t)e^{-t} dt$;

i) $X = \ell_1$, $Tx = (\frac{n+1}{n}x_n)_{n=1}^\infty$; j) $X = C([0, 1])$, $T(f)(t) = tf(t)$;

k) $X = L_2([0, 1])$, $T(f)(t) = \chi_{[0, 1/2]}(t) \cdot f(t)$;

l) $X = C([-1, 1])$, $T(f)(t) = f(|t|)$;

Výsledky:

a) $\sigma_p(T) = \{\pm i\} = \sigma(T)$ b) $\sigma_p(T) = \{1\} = \sigma(T)$ c) $\sigma_p(T) = \{2, \frac{57+\sqrt{79}}{24}, \frac{57-\sqrt{79}}{24}\} = \sigma(T)$

d) $\sigma_p(T) = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ e) $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0, 1]$

f) $\sigma_p(T) = \{\pm \frac{i}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$ g) $\sigma_p(T) = \{1, 2\} = \sigma(T)$ h) $\sigma_p(T) = \{1, 3\} = \sigma(T)$

i) $\sigma_p(T) = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{1\}$ j) $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = [0, 1]$ k) $\sigma_p(T) = \{0, 1\} = \sigma(T)$

l) $\sigma_p(T) = \{0, 1\} = \sigma(T)$

CVIČENÍ 12

1. Uvažujme operátor $T : \ell_1 \rightarrow \ell_1$ definovaný předpisem

$$Tx = (2x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2, \frac{x_4}{4}, \frac{x_5}{5}, \frac{x_6}{6}, \dots), \quad x \in \ell_1.$$

Dokažte, že T je spojitý lineární operátor. Zjistěte, zda je T kompaktní a určete $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$.

2. Uvažujme operátor $T : C([-1, 1]) \rightarrow C([-1, 1])$ definovaný předpisem

$$Tf(t) := if(t) + t^2 \int_{-1}^1 f(s) ds, \quad f \in C([-1, 1]), \quad t \in [-1, 1].$$

Dokažte, že T je spojitý lineární operátor. Zjistěte, zda je T kompaktní a určete $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$.

3. Uvažujme operátor $T : L_{10}([0, 2\pi]) \rightarrow L_{10}([0, 2\pi])$ definovaný předpisem

$$Tf(x) := \max\{\sin x, 0\}f(x), \quad f \in L_{10}([0, 2\pi]).$$

Dokažte, že T je spojitý lineární operátor. Určete $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$. Nakonec zjistěte, zda je T kompaktní operátor.

4. Uvažujme operátor $T : L_2([0, 2\pi]) \rightarrow L_2([0, 2\pi])$ definovaný předpisem

$$Tf(x) := \left(\int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt \right) \cdot \sin x - 2 \left(\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt \right) \cdot \cos x + 3f(x), \quad f \in L_2([0, 2\pi]).$$

Dokažte, že T je spojitý lineární operátor. Vyjádřete T^* (hilbertovsky adjungovaný operátor). Zjistěte, zda je T kompaktní. Určete $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$ (pro každé vlastní číslo nalezněte nějaký vlastní vektor).

Výsledky: 1. T je kompaktní, $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{0, 2 \pm \sqrt{3}\}$ 2. T není kompaktní, $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{i, \frac{2}{3} + i\}$
 3. $\sigma_p(T) = \{0\}$, $\sigma(T) = [0, 1]$, T není kompaktní 4. $T^*f(x) = \left(\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt \right) \cdot \cos x - 2 \left(\int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt \right) \cdot \sin x + 3f(x)$, T není kompaktní, $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{3, 3 \pm i\pi\sqrt{2}\}$