Vybrané partie z funkcionální analýzy, ZS 2024-2025
Zadání písemné části zkoušky - termín 8.1.

Příklad 1 (15 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : c_0 \to C([0,1])$ definované předpisem

$$Tx(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2} \cdot e^{-nt}, \qquad x \in c_0, t \in [0,1].$$

(1) Dokažte, že $Tx \in C([0,1])$ pro $x \in c_0$ a že T je spojitý lineární operátor.
(2) Vyjádřete duální operátor T^* pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.
(3) Zjistěte, zda je T kompaktní operátor.

Příklad 2 (16 bodů)**.** Uvažujme Hilbertův prostor $H = L_2([0,3])$. Napište ortonormální bázi podprostoru $Y = \operatorname{span}\{\chi_{[0,1]} + i\chi_{[2,3]}, \chi_{[1,2]} + i\chi_{[2,3]}\}$ a nalezněte nejbližší bod v Y k bodu $f(t) = it$. (Nejbližší bod uveďte ve tvaru $P_Y(it) = a\chi_{[0,1]} + b\chi_{[1,2]} + c\chi_{[2,3]}$, kde $a, b, c \in \mathbb{C}$ jsou konkrétní spočtené konstanty.)

Příklad 3 (16 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : L_4([0,1]) \to L_4([0,1])$ definované předpisem

$$Tf(t) = 3f(t) - t\int_0^1 e^x f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f \in L_4([0,1]), t \in [0,1].$$

Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor a nalezněte $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$.

Celkem: 47 bodů + 3 body za obecnou úroveň vypracovaného řešení (kvalita doprovodných komentářů atd).

Nástin řešení

Příklad 1: Pro $x \in c_0$ je $\sup_{t\in[0,1]} |\frac{x_n}{n^2} e^{-nt}| \le \|x\|_\infty \cdot \frac{1}{n^2}$ a protože $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$, dle Weierstrassova kritéria je řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{x_n}{n^2} \cdot e^{-nt}$ stejnoměrně konvergentní na $[0,1]$ a tedy Tx je spojitá funkce. Odsud snadno dostaneme, že T je dobře definovaný lineární operátor. Dále pro $x \in c_0$ je $\|Tx\| \le \sup_{t\in[0,1]} \sum_{n=1}^\infty \frac{|x_n|}{n^2} e^{-nt} \le \|x\| \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$, tedy T je spojitý a $\|T\| \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

S použitím reprezentací $(c_0)^* = \ell_1$ a $(C([0,1]))^* = M([0,1])$ dostáváme, že $T^* : M([0,1]) \to \ell_\infty$ je definován tak, že pro $\mu \in M([0,1])$ je $T^*\mu \in \ell_1$ jediná posloupnost splňující

$$T^*\mu(k) = (T^*\mu)(e_k) = \mu(Te_k) = \mu\Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{e_k(n)}{n^2} e^{-nt}\Big) = \mu(\frac{1}{k^2} e^{-kt}) = \frac{1}{k^2}\int_0^1 e^{-kt}\,\mathrm{d}\mu(t), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Tedy, $T^*\mu = \Big(\frac{1}{k^2}\int_0^1 e^{-kt}\,\mathrm{d}\mu(t)\Big)_{k=1}^\infty$ pro $\mu \in M([0,1])$.

Abychom dokázali že T je kompaktní operátor, definujme pro $N \in \mathbb{N}$ operátory $T_N : c_0 \to C([0,1])$ předpisem $T_N x(t) := \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{n^2} e^{-nt}$. Podobně jako výše ověříme, že se jedná o spojité lineární operátory (s výjimkou, že teď nemusíme používat Weiestrassovo kritérium, neboť se jedná o konečnou sumu). Dále, $\operatorname{Rng} T_N \subset \operatorname{span}\{e^{-nt} \colon n = 1,\dots,N\}$, tedy se jedná o konečně-dimenzionální operátory. Konečně, pro $x \in c_0$ máme $\|(T_N - T)x\| \le \sup_{t\in[0,1]} \sum_{n=N+1}^\infty \frac{|x_n|}{n^2} e^{-nt} \le \|x\| \cdot \sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{n^2}$, tedy $\|T_N - T\| \le \sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{n^2} \to 0$ a proto T je kompaktní operátor.

Příklad 2: Položme $\widetilde{e_1} := \chi_{[0,1]} + i\chi_{[2,3]}$. Pak $\|\widetilde{e_1}\|_2^2 = \int_0^1 \mathrm{d}t + \int_2^3 \mathrm{d}t = 2$. Označme tedy $e_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\widetilde{e_1}$. Dále položme

$$\begin{aligned}\widetilde{e_2} &:= \chi_{[1,2]} + i\chi_{[2,3]} - \langle \chi_{[1,2]} + i\chi_{[2,3]}, e_1\rangle e_1 = \chi_{[1,2]} + i\chi_{[2,3]} - \frac{1}{2}\langle \chi_{[1,2]} + i\chi_{[2,3]}, \widetilde{e_1}\rangle \widetilde{e_1} \\ &= \chi_{[1,2]} + i\chi_{[2,3]} - \frac{\widetilde{e_1}}{2}\int_0^3 i\chi_{[2,3]}(-i\chi_{[2,3]})\,\mathrm{d}t = \chi_{[1,2]} + i\chi_{[2,3]} - \frac{\widetilde{e_1}}{2} = -\frac{1}{2}\chi_{[0,1]} + \chi_{[1,2]} + \frac{i}{2}\chi_{[2,3]}.\end{aligned}$$

Pak $\|\widetilde{e_2}\|_2^2 = \int_0^1 \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t + \int_1^2 \mathrm{d}t + \int_2^3 \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$. Označíme–li tedy $e_2 := \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \widetilde{e_2}$, pak $\{e_1, e_2\}$ je ON-báze prostoru Y.

Konečně, nejbližší bod v Y k funkci $f(t) = it$ je ortogonální projekce $P_Y(f)$, což spočteme takto

$$\begin{aligned}P_Y(it) &= \langle it, e_1\rangle e_1 + \langle it, e_2\rangle e_2 = \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 ix\,\mathrm{d}x - i\int_2^3 ix\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\chi_{[0,1]} + i\chi_{[2,3]}\Big) \\ &\quad + \frac{2}{3}\Big(-\frac{1}{2}\int_0^1 ix\,\mathrm{d}x + \int_1^2 ix\,\mathrm{d}x - \frac{i}{2}\int_2^3 ix\,\mathrm{d}x\Big)\Big(-\frac{1}{2}\chi_{[0,1]} + \chi_{[1,2]} + \frac{i}{2}\chi_{[2,3]}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{i}{2} + \frac{5}{2}\Big)\Big(\chi_{[0,1]} + i\chi_{[2,3]}\Big) + \frac{2}{3}\Big(-\frac{i}{4} + \frac{3i}{2} + \frac{5}{4}\Big)\Big(-\frac{1}{2}\chi_{[0,1]} + \chi_{[1,2]} + \frac{i}{2}\chi_{[2,3]}\Big) \\ &= \frac{5+i}{4}\Big(\chi_{[0,1]} + i\chi_{[2,3]}\Big) + \frac{5+5i}{6}\Big(-\frac{1}{2}\chi_{[0,1]} + \chi_{[1,2]} + \frac{i}{2}\chi_{[2,3]}\Big) \\ &= \ldots = \frac{5-i}{6}\chi_{[0,1]} + \frac{5+5i}{6}\chi_{[1,2]} + \frac{5i-2}{3}\chi_{[2,3]}.\end{aligned}$$

Příklad 3: Operátor T můžeme napsat jako $T = 3I - S$, kde S je konečně-dimenzionální operátor daný předpisem $Sf(t) = t\int_0^1 e^x f(x)\,dx$ (obor hodnot S je jednodimenzionální prostor generovaný funkcí t). Tedy, stačí určit, že S je spojitý lineární operátor (pak i T je spojitý a lineární) a spočítat $\sigma_p(S)$ a $\sigma(S)$, protože pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ máme $\lambda I - T = (\lambda - 3)I + S = -((3-\lambda)I - S)$ a tedy $\sigma_p(T) = 3 - \sigma_p(S)$ a $\sigma(T) = 3 - \sigma(S)$.

Nejprve vyřešíme, že S je spojitý operátor. Zřejmě je lineární a máme

$$\begin{aligned}\|Sf\|_4^4 &= \int_0^1 |Sf(t)|^4\,dt = \int_0^1 t^4\,dt \cdot \Big|\int_0^1 e^x f(x)\,\mathrm{d}x\Big|^4 \le \frac{1}{5}\Big(\int_0^1 e^x|f(x)|\,\mathrm{d}x\Big)^4 \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \frac{1}{5}\Big(\|f\|_4 \cdot \|e^x\|_{4/3}\Big)^4 = \frac{1}{5}\|f\|_4^4 \cdot \Big(\int_0^1 e^{\frac{4}{3}x}\,\mathrm{d}x\Big)^3,\end{aligned}$$

tedy S je spojitý operátor a $\|S\| \le \Big(\frac{1}{5}\Big)^{1/4} \cdot \Big(\int_0^1 e^{\frac{4}{3}x}\,\mathrm{d}x\Big)^{3/4}$.

Vyřešíme nyní bodové spektrum operátoru S. Pro $\lambda \in \mathbb{K}$ tak hledáme nenulové $f \in L_1([0,1])$ splňující rovnost $\lambda f = Sf$. Pokud je $\lambda = 0$, pak nenulovým řešením je například funkce $f(t) = e^{-t}(\chi_{[0,1/2]}(t) - \chi_{[1/2,1]}(t))$. Předpokládejme nyní, že $\lambda \neq 0$. Protože obor hodnot S je jednodimenzionální prostor generovaný funkcí t, musí být jakákoliv funkce splňující rovnici $\lambda f = Sf$ tvaru $f(t) = At$ pro nějaké $A \in \mathbb{R}$. Tedy, dostáváme

$$\lambda At = Sf(t) = t\int_0^1 Axe^x\,dx = \ldots = At,$$

a tedy funkce f je řešením rovnosti $\lambda f = Sf$ právě když $f(t) = At$, kde $\lambda A = A$. Tedy buď $A = 0$ (pak ale f je nulová funkce), nebo $\lambda = 1$.

Celkem tedy $\sigma_p(S) = \{0,1\}$ a protože je operátor S konečně-dimenzionální a tedy kompaktní, máme $\sigma(S) = \sigma_p(S) = \{0,1\}$. Tedy $\sigma_p(T) = \sigma(T) = 3 - \{0,1\} = \{2,3\}$.

Vybrané partie z funkcionální analýzy, ZS 2024-2025
Zadání písemné části zkoušky - termín 22.1.

Příklad 4 (17 bodů)**.** V tomto příkladu uvažujte Banachovy prostory nad tělesem reálných čísel. Nechť je dáno zobrazení $T : L_5((1,\infty), e^t\,\mathrm{d}t) \to \ell_1$ definované předpisem

$$Tf = \Big(\int_1^\infty f(t)e^{-nt}\Big)_{n=1}^\infty, \qquad f \in L_5((1,\infty), e^t\,\mathrm{d}t).$$

(1) Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
(2) Vyjádřete duální operátor T^* pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.

Příklad 5 (11 bodů)**.** Definujme funkcionál $\varphi : L_1([1,\infty)) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(f) := \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} f(t)\cdot(1-t^{-n})\,\mathrm{d}t, \quad f \in L_1([1,\infty)).$$

Ukažte, že $\varphi \in (L_1([1,\infty)))^*$ a určete normu $\|\varphi\|$. Dále zjistěte (a dokažte), zda tento funkcionál nabývá své normy (tj. zda existuje $f \in L_1([1,\infty))$ splňující $\|f\|_1 = 1$ a $\varphi(f) = \|\varphi\|$).

Příklad 6 (19 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : C([-2,2]) \to C([-2,2])$ definované předpisem

$$Tf(t) = ||t|-1|\cdot f(t), \qquad f \in C([-2,2]), t \in [-2,2].$$

Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor a nalezněte $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$. Následně zjistěte, zda je T isomorfismus do.

Celkem: 47 bodů + 3 body za obecnou úroveň vypracovaného řešení (kvalita doprovodných komentářů atd).

Nástin řešení

Příklad 1: Pro $f \in L_5((1,\infty), e^t\,dt)$ a $n \in \mathbb{N}$ máme

$$|Tf(n)| \le \int_1^\infty |f(t)|e^{-nt}\,dt = \int_1^\infty |f(t)|e^{-nt}\,dt \overset{\text{Hölder}}{\le} \Big(\int_1^\infty |f(t)|^5 e^t\,dt\Big)^{1/5} \cdot \Big(\int_1^\infty (e^{-t/5}e^{-nt})^{5/4}\,dt\Big)^{4/5}$$
$$= \|f\|_5 \cdot \Big(\int_1^\infty e^{-t(1+5n)/4}\,dt\Big)^{4/5} = \|f\|_5 \cdot \Big(\frac{4e^{-(1+5n)/4}}{1+5n}\Big)^{4/5} = \|f\|_5 \cdot \frac{4^{4/5}}{e^{1/5}} \cdot \frac{e^{-n}}{(1+5n)^{4/5}},$$

a tedy, protože řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-n}}{(1+5n)^{4/5}}$ je konvergentní (například dle LSK a faktu, že $\frac{e^{-n}}{(1+5n)^{4/5}} \approx \frac{1}{e^n n^{4/5}} << \frac{1}{n^2}$), dostáváme že $Tf \in \ell_1$. Linearita T plyne z linearity integrálu a spojitost pak z odhadu $\|Tf\| = \sum_{n=1}^\infty |Tf(n)| \le \|f\|_5 \cdot \frac{4^{4/5}}{e^{1/5}} \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-n}}{(1+5n)^{4/5}}$ pro $f \in L_5((1,\infty), e^t\,dt)$.

S použitím reprezentací $(L_5)^* = L_{5/4}$ a $(\ell_1)^* = \ell_\infty$ dostáváme, že $T^* : \ell_\infty \to L_{5/4}((1,\infty), e^t\,dt)$ je operátor splňující pro $x \in \ell_\infty$ že $T^*x \in L_{5/4}$ je jediná funkce z $L_{5/4}$ splňující že pro všechna $g \in L_5((1,\infty), e^t\,dt)$ je

$$\int_1^\infty g(t)\cdot T^*x(t)e^t\,dt = T^*x(g) = x(Tg) = \sum_{n=1}^\infty x_n \int_1^\infty g(t)e^{-nt}\,dt = \sum_{n=1}^\infty x_n \int_1^\infty g(t)e^{-(n+1)t}e^t\,dt.$$

Nyní si nejprve uvědomme, že $\sum_{n=1}^\infty x_n e^{-(n+1)t}$ je absolutně konvergetní řada v Banachově prostoru $L_{5/4}$, neboť

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_n e^{-(n+1)t}\|_{5/4} \le \|x\|_\infty \cdot \sum_{n=1}^\infty \Big(\int_1^\infty e^{-5(n+1)t/4}\,dt\Big)^{4/5} = \|x\|_\infty \cdot \sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{4e^{-5(n+1)/4}}{5(n+1)}\Big)^{4/5} < \infty$$

(poslední nerovnost, tj. konvergence řady, se odůvodní podobně jako výše). Označíme–li tedy $h := \sum_{n=1}^\infty x_n e^{-(n+1)t}$, pak $h \in L_{5/4}$ a pro částečné součty $h_N := \sum_{n=1}^N x_n e^{-(n+1)t}$ platí, že $h_N \to h$ v prostoru $L_{5/4}$. Pak dostáváme (s použitím faktu že $(L_5)^* = L_{5/4}$, tj. $g \mapsto \int gh\,d\mu$ je spojitá funkce)

$$\int g(t)h(t)e^t\,dt = \lim_{N\to\infty} \int g(t)h_N(t)e^t\,dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N x_n \int_1^\infty g(t)e^{-nt}\,dt = \sum_{n=1}^\infty x_n \int_1^\infty g(t)e^{-(n+1)t}e^t\,dt$$

a tedy $T^*x = h$.

Příklad 2: Pro $f \in L_1$ máme

$$|\varphi(f)| \le \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} |f(t)|(1-t^{-n})\,dt \le \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} |f(t)|\,dt = \int_1^\infty |f(t)|\,dt = \|f\|_1, \tag{1}$$

tedy $\varphi(f)$ je reálné číslo. Nyní snadno nahlédneme, že φ je lineární a spojité, přičemž $\|\varphi\| \le 1$. Pro funkce $f_n := \chi_{[n,n+1]}$ máme $\|f_n\|_1 = 1$ a zároveň

$$\varphi(f_n) = \int_n^{n+1} (1-t^{-n})\,dt = 1 - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^n}\,dt \ge 1 - \frac{1}{n^n} \to 1,$$

tedy $\|\varphi\| = 1$. Konečně, φ nenabývá své normy, neboť pokud je pravda že $\varphi(f) = \|f\|_1 = 1$, pak z (1) dostáváme, že nutně pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\int_n^{n+1} |f(t)|(1-t^{-n})\,dt = \int_n^{n+1} |f(t)|\,dt$, tedy $\int_n^{n+1} |f(t)|t^{-n}\,dt = 0$ a proto $|f(t)|t^{-n} = 0$ s.v. na $(n, n+1)$ pro $n \in \mathbb{N}$, z čehož plyne $f = 0$ s.v. na $(1,\infty)$ což je spor s tím, že $\|f\|_1 = 1$.

Příklad 3: Pro $f \in C([-2,2])$ máme $\|Tf\| \le \||t|-1\|_\infty \cdot \|f\|_\infty \le \|f\|_\infty$, tedy snadno nahlédneme, že T je spojitý lineární operátor a $\|T\| \le 1$.

Vyřešíme nyní bodové spektrum operátoru T. Pro $\lambda \in \mathbb{K}$ tak hledáme nenulové $f \in C([-2,2])$ splňující rovnost $\lambda f = Tf$, ekvivalentně $\lambda f(t) = ||t|-1| \cdot f(t)$ pro $t \in [-2,2]$, což nutně implikuje že každé řešení f rovnice $\lambda f = Tf$ splňuje, že v každém bodě t je buď $f(t) = 0$ nebo $\lambda = ||t|-1|$, tedy ze spojitosti f dostáváme, že $f(t) = 0$ pro všechna $t \in [-2,2]$. Nenulové řešení proto neexistuje a tak $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Zbývá určit spektrum. Víme, že $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|) \subset B(0,1)$. Zvolme tedy $|\lambda| \le 1$ a zkoumejme, zda je operátor $\lambda I - T$ surjektivní. Pro zadané $g \in C([-2,2])$ hledáme $f \in C([-2,2])$ splňující $\lambda f(t) - ||t|-1|f(t) = g(t)$. Tedy nutně musí platit

$$(\lambda - ||t|-1|)f(t) = g(t), \quad t \in [-2,2]. \tag{2}$$

Pokud je λ v oboru hodnot funkce $||t|-1|$, pak například pro funkci $g(t) = 1$ takové f není možné najít, neboť na levé straně rovnosti (2) dostáváme nulu pro nějaké $t \in [-2,2]$ kdežto na pravé straně rovnosti máme hodnotu $g(t) = 1$ pro každé $t \in [-2,2]$. Naopak, pokud λ není v oboru hodnot funkce $||t|-1|$, pak $f(t) = \frac{g(t)}{\lambda - ||t|-1|}$ je spojitá funkce, která řeší příslušnou rovnici. Tedy, $\lambda I - T$ není surjektivní právě když λ je v oboru hodnot funkce $||t|-1|$, tj. právě když $\lambda \in [0,1]$. Celkem tedy $\sigma(T) = [0,1]$.

Konečně, ukažme že T není isomorfismus do. Uvažujme funkce $f_n \in C([-2,2])$, $n \ge 2$ definované předpisem

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{||t|-1|} & t \in [0, 1-\frac{1}{n}], \\ 1 & t \in [-2,0] \cup [1-\frac{1}{2n}, 2], \end{cases}$$

a na intervalu $[1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{2n}]$ jsou f_n dodefinované lineárně (tj. $f_n(t) = 2n(n-1)(1-t) + 2 - n$). Pak $\|Tf_n\| \le 1$, $n \ge 2$, ale $\|f_n\| \ge f_n(1-\frac{1}{n}) = n \to \infty$. Tedy T není isomorfismus do.

Vybrané partie z funkcionální analýzy, ZS 2024-2025
Zadání písemné části zkoušky - termín 29.1.

Příklad 7 (16 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : M([0,1]) \to \ell_\infty$ definované předpisem

$$T\mu = \Big(\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \Big)_{n=1}^{\infty}, \qquad \mu \in M([0,1]),$$

kde $f_n(t)$ jsou spojité funkce dané předpisem $f_n(t) := \max\{0, 1 - 2^{n+1}|t - 2^{-n}|\}$, $t \in [0,1]$.

Dokažte, že T je spojitý lineární operátor a zjistěte, zda je T kompaktní operátor. Dále nalezněte spojitý lineární operátor $S : \ell_1 \to C([0,1])$ splňující, že pokud vyjádříme duální operátor S^* pomocí reprezentace klasických prostorů, pak $S^* = T$ (můžete bez důkazu použít, že takový operátor S existuje a že pro každý prvek $x \in \ell_1$ platí $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$).
(*Hint: uvědomte si, že stačí zjistit hodnoty* $S(e_n)$*, neboť* $Sx = \sum_{n=1}^{\infty} x_n S(e_n)$ *pro každé* $x \in \ell_1$*.*)

Příklad 8 (13 bodů)**.** Uvažujte Hilbertův prostor $H = L_2((0, \sqrt[3]{\pi}), t^2\,\mathrm{d}t)$. Nalezněte ortonormální bázi podprostoru $Y = \operatorname{span}\{\sin(t^3), \cos(t^3)\}$ a nalezněte nejbližší bod v Y k bodu $f_0(t) = t^3$.

Příklad 9 (18 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : c_0 \to c_0$ definované předpisem

$$Tx = \Big((1 + \tfrac{1}{1})x_2, x_1, (1 + \tfrac{1}{2})x_4, x_3, (1 + \tfrac{1}{3})x_6, x_5, \dots \Big), \qquad x \in c_0.$$

(Přesněji, $Tx(2n-1) = (1 + \frac{1}{n})x_{2n}$ a $Tx(2n) = x_{2n-1}$ pro $n \geq 1$.)

Dokažte, že $Tx \in c_0$ pro $x \in c_0$, že T je spojitý lineární operátor a nalezněte $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$.

Celkem: 47 bodů + 3 body za obecnou úroveň vypracovaného řešení (kvalita doprovodných komentářů atd).

Nástin řešení

Příklad 1: Nejpvre si všimněme, že $\|f_n\|_\infty \le 1$ pro $n \ge 1$ a tedy, pro $\mu \in M([0,1])$ a $n \ge 1$ máme $|T\mu(n)| \le \int_0^1 |f_n(t)| \, \mathrm{d}|\mu|(t) \le \|\mu\|$ a tedy $T\mu \in \ell_\infty$ a $\|T\mu\| \le \|\mu\|$. Protože operátor T je zřejmě lineární, dostáváme také že T je spojitý a $\|T\| \le 1$.

Uvažujme nyní míry $\mu_n := \delta(2^{-n})$, $n \ge 1$ (kde $\delta(x)$ značí Diracovu míru v bodě x). Pak pro $n, m \in \mathbb{N}$, $n \ne m$ je

$$\|T\mu_n - T\mu_m\| \ge |T\mu_n(n) - T\mu_m(n)| = |f_n(2^{-n}) - f_m(2^{-n})| = 1,$$

proto $(T\mu_n)$ neobsahuje cauchyovskou posloupnost a protože (μ_n) je posloupnost z $B_{M([0,1])}$, operátor T není kompaktní.

Konečně, pokud $S : \ell_1 \to C([0,1])$ je spojitý lineární operátor splňující $S^* = T$, pak musí pro každou míru $\mu \in M([0,1])$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platit, že $S^*\mu(e_n) = \mu(Se_n) = \int_0^1 Se_n(t) \, \mathrm{d}\mu(t)$, tedy rovnost $S^* = T$ implikuje, že

$$\int_0^1 Se_n(t) \, \mathrm{d}\mu(t) = S^*\mu(e_n) = T\mu(e_n) = \int_0^1 f_n(t) \, \mathrm{d}\mu(t).$$

Pro každé $n \ge 1$ je tedy Se_n spojitá funkce splňující $\mu(Se_n) = \mu(f_n)$ pro $\mu \in M([0,1])$ a protože $M([0,1]) = C([0,1])^*$ odděluje body $C([0,1])$, je nutně $Se_n = f_n$ pro $n \ge 1$. Dostáváme tak, že $S : \ell_1 \to C([0,1])$ je dáno předpisem

$$Sx := \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n, \qquad x \in \ell_1.$$

(Dá se nyní již celkem snadno ověřit, že S je vskutku spojitý lineární operátor a $S^* = T$, ale to již není součástí zadání.)

Příklad 2: Položme $\widetilde{e_1} := \sin(t^3)$. Pak s použitím substituce "$u = t^3$" dostaneme

$$\|\widetilde{e_1}\|_2^2 = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin^2(t^3) t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^2 u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{6} \int_0^\pi 1 - \cos(2u) \, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{6}.$$

Označme tedy $e_1 := \sqrt{\frac{6}{\pi}} \widetilde{e_1}$. Dále položme

$$\begin{aligned} \widetilde{e_2} &:= \cos(t^3) - \langle \cos(t^3), e_1 \rangle e_1 = \cos(t^3) - \frac{6}{\pi} \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \cos(s^3) \sin(s^3) s^2 \, \mathrm{d}s \sin(t^3) \\ &= \cos(t^3) - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(u) \sin(u) \, \mathrm{d}u \sin(t^3) = \cos(t^3) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(2u) \, \mathrm{d}u \sin(t^3) = \cos(t^3). \end{aligned}$$

Pak podobně jako výše spočteme že $\|\widetilde{e_2}\|_2^2 = \frac{1}{3} \int_0^\pi \cos^2 u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{6} \int_0^\pi 1 + \cos(2u) \, \mathrm{d}u = \frac{\pi}{6}$ a označíme–li tedy $e_2 := \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cos(t^3)$, pak $\{e_1, e_2\}$ je ON-báze prostoru Y.

Konečně, nejbližší bod v Y k funkci $f(t) = t^3$ je ortogonální projekce $P_Y(f)$, což spočteme takto

$$\begin{aligned} P_Y(it) &= \langle t^3, e_1 \rangle e_1 + \langle t^3, e_2 \rangle e_2 = \frac{6}{\pi} \Big(\sin(t^3) \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} s^3 \sin(s^3) s^2 \, \mathrm{d}s + \cos(t^3) \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} s^3 \cos(s^3) s^2 \, \mathrm{d}s \Big) \\ &= \frac{2}{\pi} \Big(\sin(t^3) \int_0^\pi u \sin(u) \, \mathrm{d}u + \cos(t^3) \int_0^\pi u \cos(u) \, \mathrm{d}u \Big) = \ldots = \frac{2}{\pi} (\pi \sin(t^3) - 2\cos(t^3)). \end{aligned}$$

Příklad 3: Zvolme $x \in c_0$. Pro $n \ge 1$ máme $|Tx(2n-1)| \le 2|x_{2n}|$ a $|Tx(2n)| = |x_{2n-1}|$, tedy $Tx(k) \to 0$. Dokázali jsme tak, že $Tx \in c_0$. Snadno nahlédneme, že T je lineární a z výpočtu výše vidíme, že T je spojitý a $\|T\| \le 2$.

Vyřešíme nyní bodové spektrum operátoru T. Pro $\lambda \in \mathbb{K}$ tak hledáme nenulové $x \in c_0$ splňující rovnost $\lambda x = Tx$, ekvivalentně pro každé $n \ge 1$ je $\lambda x_{2n-1} = (1 + \frac{1}{n}) x_{2n}$ a $\lambda x_{2n} = x_{2n-1}$, pak ale nutně $(1 + \frac{1}{n}) x_{2n} = \lambda x_{2n-1} = \lambda^2 x_{2n}$ a proto buď $x_{2n} = x_{2n-1} = 0$ nebo $\lambda^2 = 1 + \frac{1}{n}$. Pokud tedy existuje nenulové řešení rovnice $\lambda x - Tx = 0$, pak nutně $\lambda \in \{\pm\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \colon n \ge 1\}$ a pro $\lambda = \pm\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ je nenulovým řešením například vektor $x = e_{2n} + \frac{1}{\lambda}(1 + \frac{1}{n}) e_{2n-1}$. Celkem tedy $\sigma_p(T) = \{\pm\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \colon n \ge 1\}$.

Zbývá určit spektrum. Víme, že $\sigma(T) \supset \overline{\sigma_p(T)} = \{\pm 1\} \cup \sigma_p(T)$. Zvolme $\lambda \notin \overline{\sigma_p(T)}$ a zkoumejme, zda je operátor $\lambda I - T$ surjektivní. Pro zadané $y \in c_0$ hledáme $x \in c_0$ splňující $\lambda x - Tx = y$, ekvivalentně pro každé $n \ge 1$ řeší dvojice (x_{2n-1}, x_{2n}) soustavu rovnic určenou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -(1 + \frac{1}{n}) & y_{2n-1} \\ -1 & \lambda & y_{2n} \end{array} \right) \overset{\text{pro } \lambda \ne 0}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -(1 + \frac{1}{n}) & y_{2n-1} \\ 0 & \lambda^2 - (1 + \frac{1}{n}) & \lambda y_{2n} + y_{2n-1} \end{array} \right).$$

Pokud $\lambda = 0$, pak je řešením $x_{2n-1} = -y_{2n}$ a $x_{2n} = -\frac{1}{1 + 1/n} y_{2n-1}$ což zřejmě definuje prvek z c_0. Pokud $\lambda \ne 0$, pak je řešením $x_{2n} = \frac{1}{\lambda^2 - (1 + \frac{1}{n})} \Big(\lambda y_{2n} + y_{2n-1} \Big)$ a $x_{2n-1} = \frac{1}{\lambda} \Big(y_{2n-1} + (1 + \frac{1}{n}) x_{2n} \Big)$. Protože $\lambda \notin \overline{\sigma_p(T)}$, je $\Big(\frac{1}{\lambda^2 - (1 + \frac{1}{n})} \Big)_{n=1}^\infty$ omezená posloupnost a tedy $x_{2n} \to 0$ a pak také $x_{2n-1} \to 0$, tedy takto definovaný prvek splní $x \in c_0$. Celkem tedy $\lambda I - T$ je surjektivní a proto $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)} = \{\pm 1\} \cup \sigma_p(T)$.

Vybrané partie z funkcionální analýzy, ZS 2024-2025
Zadání písemné části zkoušky - termín 5.2.

Příklad 10 (15 bodů)**.** Nechť je dáno pro $p \in [1,\infty)$ zobrazení $T_p : L_p([0,1]) \to L_1([0,1])$ definované předpisem

$$T_p f(t) = e^t f(t), \qquad f \in L_p([0,1]),\ t \in [0,1].$$

(1) Dokažte, že $T_p f \in L_1([0,1])$ pro $f \in L_p([0,1])$ a že T_p je spojitý lineární operátor pro každé $p \in [1,\infty)$.
(2) Vyjádřete pro $p = 3$ duální operátor $(T_3)^*$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.
(3) Zjistěte, zda je pro $p = 1$ operátor T_1 kompaktní.

Příklad 11 (13 bodů)**.** Definujme funkcionál $\varphi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(f) := \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(\tfrac{1}{n}), \quad f \in C([0,1]).$$

Ukažte, že $\varphi \in (C([0,1]))^*$ a určete normu $\|\varphi\|$. Dále zjistěte (a dokažte), zda tento funkcionál nabývá své normy (tj. zda existuje $f \in C([0,1])$ splňující $\|f\|_\infty = 1$ a $\varphi(f) = \|\varphi\|$).

Příklad 12 (19 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ definované předpisem

$$Tx = \Big(x_1 + 2ix_2, x_1 + (2i-1)x_2, \tfrac{1}{3}x_3, \tfrac{1}{4}x_4, \tfrac{1}{5}x_5, \dots\Big), \qquad x \in \ell_\infty.$$

Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor a nalezněte $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$.

Celkem: 47 bodů + 3 body za obecnou úroveň vypracovaného řešení (kvalita doprovodných komentářů atd).

Nástin řešení
Příklad 1: Pro každé $f \in L_p([0,1])$ máme

$$\|T_p f\|_1 = \int_0^1 e^t |f(t)| \,\mathrm{d}t \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \cdot \|e^t\|_q \leq \|f\|_3 \cdot e \cdot \|1\|_q = \|f\|_3 \cdot e,$$

tedy $T_p f \in L_1([0,1])$ a protože T_p je lineární, dostáváme také že T_p je spojité a $\|T_p\| \leq e$.

Nyní uvažujme případ $p = 3$ a místo T_3 pišme zkrátka T. S použitím reprezentací $(L_3)^* = L_{3/2}$ a $(L_1)^* = L_\infty$ dostáváme, že $T^* : L_\infty([0,1]) \to L_{3/2}([0,1]])$ je operátor splňující pro $f \in L_\infty$ že $T^* f$ je jediná funkce z $L_{3/2}$ splňující že pro všechna $g \in L_3([0,1])$ je

$$\int_0^1 T^* f(t) g(t) \,\mathrm{d}t = T^* f(g) = f(Tg) = \int_0^1 f(t) Tg(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^t f(t) g(t) \,\mathrm{d}t.$$

Protože $t \mapsto e^t f(t)$ je funkce z $L_{3/2}$ (neboť $|e^t f(t)|^{3/2} \leq e^{3/2} |f(t)|^{3/2} \in L_1([0,1])$), dostáváme tak že $T^* f(t) = e^t f(t)$ pro $f \in L_{3/2}([0,1])$.

Konečně, uvažujme případ $p = 1$ a místo T_1 pišme zkrátka T. Uvažujme nekonečně-dimenzionální prostor $Z := \{f \in L_1([0,1]) \colon f|_{[0,\frac{1}{2}]} \equiv 0\}$. Pak pro $f \in Z$ platí $\|Tf\|_1 = \int_{1/2}^1 e^t |f(t)| \,\mathrm{d}t \geq e^{1/2} \int_{1/2}^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t \geq e^{1/2} \|f\|_1$, tedy $T : Z \to L_1([0,1])$ je isomorfismus do a proto T není kompaktní operátor.

Příklad 2: Pro $f \in C([0,1])$ máme

$$|\varphi(f)| \leq \int_0^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} |f(\tfrac{1}{n})| \overset{(*)}{\leq} \Big(1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\Big) \|f\|_\infty,$$

což snadno implikuje že φ je dobře definovaná lineární funkce, která je spojitá a $\|\varphi\| \leq \Big(1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\Big)$. Uvažujme nyní spojité funkce f_k, $k \geq 10$ definované tak, že $f_k(\frac{1}{n}) = -1$ pro $n \in \mathbb{N}$, $f_k(t) = -1$ pro $t \leq \frac{1}{k+1}$, $f_k(t) = 1$ pro $t \in [\frac{1}{k+1} + 2^{-k}, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^k [\frac{1}{n} - 2^{-k}, \frac{1}{n} + 2^{-k}]$ a funkce f_k je dodefinována lineárně na intervalech $[\frac{1}{n} - 2^{-k}, \frac{1}{n}]$ a $[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + 2^{-k}]$ pro $n \leq k$. Pak $\|f_k\| \leq 1$, $k \geq 4$ a

$$\varphi(f_k) \geq \int_0^1 f_k(t) \,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = 1 - \Big(\frac{1}{k+1} + 2^{-k} + \frac{2k}{2^k}\Big) + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \to 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}, \quad k \to \infty,$$

tedy $\|\varphi\| = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

Operátor φ své normy nenabývá, neboť pokud $f \in C([0,1])$, $\|f\| = 1$ splní, že $\varphi(f) = \|\varphi\|$, pak nerovnost $(*)$ výše musí být rovnost a tedy nutně $\int_0^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t = 1$, tedy $f = 1$ skoro všude a ze spojitosti funkce f pak buď $f = 1$ nebo $f = -1$. Ale $|\varphi(\pm 1)| = 1 - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \|\varphi\|$ což je ve sporu s tím že $\varphi(f) = \|\varphi\|$.

Příklad 3: Pro $x \in \ell_\infty$ máme $\|Tx\| \leq \max\{|x_1| + |2i||x_2|, |x_1| + |2i - 1||x_2|, \frac{1}{n}|x_n| \colon n \geq 3\} \leq 4\|x\|_\infty$, tedy $Tx \in \ell_\infty$ a protože je snadné vidět že T je lineární, tak také T je spojitý a $\|T\| \leq 4$.

Vyřešíme nyní bodové spektrum operátoru T. Pro $\lambda \in \mathbb{K}$ tak hledáme nenulové $x \in \ell_\infty$ splňující rovnost $\lambda x = Tx$, ekvivalentně pro každé $n \geq 3$ je $\lambda x_n = \frac{1}{n} x_n$, $\lambda x_1 = x_1 + 2i x_2$ a $\lambda x_2 = x_1 + (2i - 1) x_2$. Pokud $\lambda = \frac{1}{n}$ pro nějaké $n \geq 3$ pak nenulovým řešením je $x = e_n$. Můžeme tedy předpokládat, že $\lambda \notin \{\frac{1}{n} \colon n \geq 3\}$. Pak $x_n = 0$ pro $n \geq 3$ a zkoumáme tedy, zda existuje $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ vyhovující soustavě lineárních rovnic $\lambda x_1 = x_1 + 2i x_2$ a $\lambda x_2 = x_1 + (2i - 1) x_2$. Pro $\lambda = 1$ nenulové řešení neexistuje a pro $\lambda \neq 1$ dostáváme $x_1 = \frac{2i}{\lambda - 1} x_2$ a $\lambda x_2 = \Big(2i - 1 + \frac{2i}{\lambda - 1}\Big) x_2$ a tedy nenulové řešení existuje právě když $\lambda = 2i - 1 + \frac{2i}{\lambda - 1}$, ekvivalentně $\lambda^2 - 2i\lambda - 1 = 0$, což je splněno pro $\lambda = \frac{2i \pm \sqrt{-4+4}}{2} = i$. Tedy $\sigma_p(T) = \{i\} \cup \{\frac{1}{n} \colon n \geq 3\}$.

Zbývá určit spektrum. Víme, že $\sigma(T) \supset \overline{\sigma_p(T)} = \{0, i\} \cup \sigma_p(T)$. Zvolme $\lambda \notin \overline{\sigma_p(T)}$ a zkoumejme, zda je operátor $\lambda I - T$ surjektivní. Pro zadané $y \in \ell_\infty$ hledáme $x \in \ell_\infty$ splňující $\lambda x - Tx = y$, ekvivalentně $x_n = \frac{y_n}{\lambda - \frac{1}{n}}$ pro $n \geq 3$ a $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ řeší soustavu rovnic určenou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 1 & -2i & y_1 \\ -1 & \lambda - 2i + 1 & y_2 \end{array}\right)$$

Pokud je $\lambda = 1$, pak $x_2 = -\frac{y_1}{2i}$ a $x_1 = -y_2 + (\lambda - 2i + 1) x_2$. Pro $\lambda \neq 1$ pak řešíme soustavu rovnic takto:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 1 & -2i & y_1 \\ -1 & \lambda - 2i + 1 & y_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 1 & -2i & y_1 \\ 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 2i + 1) - 2i & (\lambda - 1) y_2 + y_1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 1 & -2i & y_1 \\ 0 & \lambda^2 - 2i\lambda - 1 & (\lambda - 1) y_2 + y_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 1 & -2i & y_1 \\ 0 & (\lambda - i)^2 & (\lambda - 1) y_2 + y_1 \end{array}\right),$$

tedy $x_2 = \frac{1}{(\lambda - i)^2}((\lambda - 1) y_2 + y_1)$ a $x_1 = \frac{1}{\lambda - 1}(y_1 + 2i x_2)$. V každém případě je takto definovaná posloupnost (x_n) omezená, neboť (y_n) a $(\frac{1}{\lambda - \frac{1}{n}})$ jsou omezené posloupnosti (což plyne z toho že $y \in \ell_\infty$ a $\lambda \notin \overline{\{\frac{1}{n} \colon n \geq 3\}}$). Tedy jsme nalezli $x \in \ell_\infty$ splňující $\lambda x - Tx = y$ a proto $\lambda I - T$ je surjektivní. Celkem tedy $\sigma(T) = \overline{\sigma_p(T)} = \{0, i\} \cup \{\frac{1}{n} \colon n \geq 3\}$.

Vybrané partie z funkcionální analýzy, ZS 2024-2025
Zadání písemné části zkoušky - termín 12.2.

Příklad 13 (18 bodů)**.** V tomto příkladu uvažujte Banachovy prostory nad tělesem reálných čísel. Nechť je dáno zobrazení $T : L_2([0,1]) \to C([0,1])$ definované předpisem

$$Tf(t) = \int_0^1 \sin(2st) f(s) \, \mathrm{d}s, \qquad f \in L_2([0,1]).$$

(1) Dokažte, že $Tf \in C([0,1])$ pro $f \in L_2([0,2])$ a že T je spojitý lineární operátor.
(2) Zjistěte, zda je T kompaktní operátor.
(3) Pomocí reprezentace duálů klasických prostorů vyjádřete $T^*\lambda$ (kde λ je Lebesgueova míra na intervalu $[0,1]$).

Příklad 14 (13 bodů)**.** Vyjádřete nějakou ortonormální bázi $\{f_1, f_2\}$ podprostoru

$$Y = \operatorname{span}\left\{ \left(\frac{i^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}, \left(\frac{(-i)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \right\} \subset \ell_2.$$

Můžete bez důkazu používat známé součty řad $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Dále vyjádřete předpis pro hilbertovsky adjungovaný operátor k operátoru $S : \ell_2 \to \ell_2$ definovaném předpisem $Sx := \langle x, f_1 \rangle f_2$ pro $x \in \ell_2$.

Příklad 15 (16 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : L_1([0,3]) \to L_1([0,3])$ definované předpisem

$$Tf(t) = 5f(t) - t^2 \int_0^2 x f(x) \, \mathrm{d}x, \qquad f \in L_1([0,3]), t \in [0,3].$$

Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor a nalezněte $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$.

Celkem: 47 bodů + 3 body za obecnou úroveň vypracovaného řešení (kvalita doprovodných komentářů atd).

Nástin řešení

Příklad 1: Zvolme $f \in L_2([0,1])$. Předně si uvědomme, že z Hölderovy nerovnosti je $\|f\|_1 \le \|f\|_2 \cdot \|1\|_2 = \|f\|_2$ a tedy $f \in L_1([0,1])$. Nyní již vidíme, že Tf je spojitá funkce podle Věty o integrálu závislém na parametru (integrovatelná majoranta existuje, protože $|\sin(2st)f(s)| \le |f(s)| \in L_1([0,1])$ pro každé $t \in [0,1]$), snadno pak vidíme, že T je také lineární. Zároveň

$$|Tf(t)| \le \int_0^1 |f(s)|\,\mathrm{d}s = \|f\|_1 \le \|f\|_2, \quad t \in [0,1]$$

a tedy T je spojité a $\|T\| \le 1$.

Zvolme $f \in B_{L_2([0,1])}$. Pak pro $t, t' \in [0,1]$ dostaneme (použijeme, že sin je 1-Lipschitzovská funkce)

$$\begin{aligned}|Tf(t) - Tf(t')| &\le \int_0^1 |\sin(2st) - \sin(2st')||f(s)|\,\mathrm{d}s \le 2|t-t'|\int_0^1 s|f(s)|\,\mathrm{d}s \overset{\text{Hölder}}{\le} 2|t-t'|\|f\|_2 \cdot \|s\|_2 \\ &\le 2|t-t'|\|s\|_2 = \tfrac{2}{\sqrt{3}}|t-t'|,\end{aligned}$$

tedy Tf je $\frac{2}{\sqrt{3}}$-Lipschitzovská funkce. Tedy každá funkce z $T(B_{L_2([0,1])}) \subset B_{C([0,1])}$ je $\frac{2}{\sqrt{3}}$-Lipschitzovská, z Arzela-Ascoliho věty tak dostaneme že $T(B_{L_2([0,1])})$ je prekompaktní a tedy T je kompaktní operátor.

S použitím reprezentací $(C[0,1])^* = M([0,1])$ a $(L_2([0,1]))^* = L_2([0,1])$ dostáváme, že $T^*\lambda$ je jediná funkce z L_2 splňující že pro všechna $g \in L_2([0,1]])$ je

$$\begin{aligned}\int_0^1 T^*\lambda(t)g(t)\,\mathrm{d}t = (T^*\lambda)(g) = \lambda(Tg) = \int_0^1 Tg(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1\int_0^1 \sin(2st)g(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \overset{\text{Fubini*}}{=} \int_0^1\int_0^1 \sin(2st)\,\mathrm{d}t g(s)\,\mathrm{d}s \\ = \int_0^1 \frac{1-\cos(2s)}{2s} g(s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

(*Fubiniovu větu můžeme použít, neboť $\int_0^1\int_0^1 |\sin(2st)g(s)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \le \int_0^1\int_0^1 |g(s)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \le \|g\|_1 \le \|g\|_2 < \infty$.)

Položme tedy $h(t) := \frac{1-\cos(2t)}{2t}$. Pak $\lim_{t\to 0+} h(t) \overset{\text{L'Hospital}}{=} 0$, tedy také $\lim_{t\to 0+} h^2(t) = 0$, tedy h^2 je integrovatelná funkce a proto $h \in L_2([0,1])$. Dostáváme tak, že $T^*\lambda = h$.

Příklad 2: Máme $\|(\frac{i^n}{n})\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$. Označme tedy posloupnost $\left(\frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot \frac{i^n}{n}\right)_{n=1}^\infty \in \ell_2$ jako f_1. Dále položme

$$\widetilde{f_2} = \left(\frac{(-i)^n}{n}\right)_{n=1}^\infty - \left\langle \left(\frac{(-i)^n}{n}\right)_{n=1}^\infty, f_1\right\rangle f_1 = \left(\frac{(-i)^n}{n}\right)_{n=1}^\infty - \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-i)^{2n}}{n^2}\left(\frac{i^n}{n}\right)_{n=1}^\infty = \left(\left((-1)^n + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{i^n}{n}\right)_{n=1}^\infty$$

a spočtěme (používáme, že $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}$ a $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}$)

$$\|\widetilde{f_2}\|_2^2 = \sum_{n=1}^\infty \left(-1+\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^\infty\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}\left(\frac{3}{4}+\frac{9}{4}\right) = \frac{\pi^2}{8},$$

tedy pro $f_2 = \frac{\sqrt{8}}{\pi}\cdot\widetilde{f_2}$ máme, že $\{f_1, f_2\}$ je ON báze prostoru Y.

Hilbertovsky adjungovaný operátor $S^\star : \ell_2 \to \ell_2$ pak musí splňovat pro každé $x, y \in \ell_2$, že

$$\langle S^\star x, y\rangle = \langle x, Sy\rangle = \langle x, \langle y, f_1\rangle f_2\rangle = \overline{\langle y, f_1\rangle}\cdot\langle x, f_2\rangle = \langle x, f_2\rangle\cdot\langle f_1, y\rangle = \langle\langle x, f_2\rangle f_1, y\rangle$$

a tedy $S^\star x = \langle x, f_2\rangle f_1$ pro $x \in \ell_2$. Jinými slovy, pro $x \in \ell_2$ máme

$$Sx = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\Big(\sum_{n=1}^\infty x_n\overline{f_2(n)}\Big)\cdot\Big(\frac{i^n}{n}\Big)_{n=1}^\infty = \frac{\sqrt{48}}{\pi^2}\Big(\sum_{n=1}^\infty \frac{x_n(-i)^n}{n}((-1)^n + \frac{1}{2})\Big)\cdot\Big(\frac{i^n}{n}\Big)_{n=1}^\infty$$

Příklad 3: Operátor T můžeme napsat jako $T = 5I - S$, kde S je konečně-dimenzionální operátor daný předpisem $Sf(t) = t^2\int_0^2 xf(x)\,dx$ (obor hodnot S je jednodimenzionální prostor generovaný funkcí t^2). Tedy, stačí určit, že S je spojitý lineární operátor (pak i T je spojitý a lineární) a spočítat $\sigma_p(S)$ a $\sigma(S)$, protože pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ máme $\lambda I - T = (\lambda - 5)I + S = -((5-\lambda)I - S)$ a tedy $\sigma_p(T) = 5 - \sigma_p(S)$ a $\sigma(T) = 5 - \sigma(S)$.

Nejprve vyřešíme, že S je spojitý operátor. Zřejmě je lineární a pro $f \in L_1([0,3])$ máme

$$\|Sf\|_1 = \int_0^3 t^2\Big|\int_0^2 xf(x)\,\mathrm{d}x\Big|\,\mathrm{d}t \le 9\int_0^3\int_0^2 x|f(x)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le 9\int_0^2 x|f(x)|\,\mathrm{d}x \le 18\|f\|_1,$$

tedy S je spojitý a $\|S\| \le 18$. Protože S je konečně-dimenzionální, je proto kompaktní.

Vyřešíme nyní bodové spektrum operátoru S. Pro $\lambda \in \mathbb{K}$ tak hledáme nenulové $f \in L_1([0,3])$ splňující rovnost $\lambda f = Sf$. Pokud je $\lambda = 0$, pak nenulovým řešením je jakákoliv funkce z L_1 splňující $\int_0^2 xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$, například $f(t) = \frac{1}{t}(\chi_{[1,3/2]}(t) - \chi_{[3/2,2]}(t))$. Předpokládejme nyní, že $\lambda \neq 0$. Protože obor hodnot S je jednodimenzionální prostor generovaný funkcí t, musí být jakákoliv funkce splňující $\lambda f = Sf$ tvaru $f(t) = At^2$, pak ale nutně $A\lambda t^2 = AS(t^2) = At^2\int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x = At^2\frac{2^4}{4} = 4At^2$. Tedy, pokud existuje nenulové řešení pak $\lambda = 4$ (a jedním takovým nenulovým řešením je pak například $f(t) = t^2$). Celkem tedy $\sigma_p(S) = \{0, 4\}$ a protože S je kompaktní operátor, máme $\sigma(S) = \sigma_p(S) = \{0, 4\}$. Tedy $\sigma_p(T) = \sigma(T) = 5 - \{0, 4\} = \{1, 5\}$.