ILUSTRATIVNÍ PŘÍKLADY K TEORII NEWTONOVA INTEGRÁLU

PŘ 1 [1. VÝHODA - NEMUSÍ SE NIC LEPIT]

$$\int_2^4 |3-x|\,dx = \int_2^3 (3-x)\,dx + \int_3^4 (x-3)\,dx = \left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^4$$

$$= \left(9 - \frac{9}{2} - 6 + 2\right) + \left(8 - 12 - \frac{9}{2} + 9\right) = \underline{\underline{1}}.$$

PŘ 2 [POZOR - NĚKDY NELZE INTEGRÁLY ROZDĚLIT]

$$\int_2^\infty \frac{2}{1-x^2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \int_2^\infty \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\,dx$$

PARC. ZLOMKY...

CO BY BYLO ŠPATNĚ:

$$\neq \int_2^\infty \frac{1}{1+x}\,dx + \int_2^\infty \frac{1}{1-x}\,dx$$

$$= \left[\log(1+x)\right]_2^\infty + \left[-\log(x-1)\right]_2^\infty$$

$$= (\infty - \log 2) + (-\infty + \log 2) = \boxed{\infty - \infty}$$

NENÍ DEFINOVÁNO

=> PROTO ROVNOST NEPLATÍ !

CO JE SPRÁVNĚ:

$$= \left[\log(1+x) - \log(x-1)\right]_2^\infty = \left[\log\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^\infty$$

$$\underset{\uparrow}{=} (0 - \log 3) = \underline{\underline{-\log 3}}.$$

$\lim_{y\to 1} \log(y) = \log 1 = 0$

PŘ 3 [JAK POUŽÍVAT VĚTU O SUBSTITUCI PRO (NI-$\int$)]

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \log^2 x}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = e^t \\ dx = e^t\, dt \\ t \in (1, \infty) \end{array} \right| = \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^\infty = \underline{\underline{1}}.$$

POUŽÍVÁM SPÍŠE 2. VOS NEŽ 1. VOS (CHCI POUŽÍT „$t = \log x$" TEDY $x = e^t$)

(PRO PŘEPOČET MEZÍ STAČÍ DOSADIT:

<u>SPODNÍ MEZ</u>: $t = \log(e) = 1$

<u>HORNÍ MEZ</u>: $t = \log(\infty) = \infty$)

PŘ 4 [2. VÝHODA - NĚKDY LZE POUŽÍT PERIODIČNOST]

$$\int_{-5\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{2 + \sin x}\, dx$$

[CHCI POUŽÍT $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, ALE TO BYCH MUSEL LEPIT]

$$= \int_{-5\pi}^{-3\pi} \cdots + \int_{-3\pi}^{-\pi} \cdots + \int_{-\pi}^{\pi} \cdots + \int_{\pi}^{3\pi} \cdots + \int_{3\pi}^{5\pi} \cdots = 5 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{2 + \sin x}\, dx$$

<u>OBECNĚ</u>: f je K-PERIODICKÁ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = \int_{a+K}^{b+K} f(x)\, dx$

<u>DK</u>: $$\int_{a+K}^{b+K} f(x)\, dx = \left| \begin{array}{l} x = t+K \\ dx = dt \\ t \in (a, b) \end{array} \right| = \int_a^b \underbrace{f(t+K)}_{= f(t)}\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$$

$f(t)$ → PERIODIČNOST

$\boxtimes$

$$= \left| \begin{array}{l} x = 2 \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt \\ t \in (-\infty, \infty) \end{array} \right| = 5 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

TEĎ UŽ LEPIT NEBUDU MUSET ; CHCI „$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$" TEDY $\boxed{x = 2 \operatorname{arctg} t}$

UŽ VÍME: „$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$"

$$= 10 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{(1+t^2)(t^2+t+1)}\, dt = \circledast^{\text{NÍŽE}}$$

⌈ PARC. ZLOMKY:

$$\frac{t}{(1+t^2)(t^2+t+1)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+t+1}$$

$$t = (At+B)(t^2+t+1) + (Ct+D)(t^2+1)$$

$$= t^3(A+C) + t^2(A+B+D) + t(A+B+C) + (B+D)$$

POROVNÁNÍM MOCNIN U „t":

$$0 = A+C = A+B+D \underset{\Downarrow}{=} B+D \; ; \quad A+B+C = 1$$

$$\underline{\underline{A=0}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C=0}} \; ; \; \underline{\underline{B=1}} \; ; \; \underline{\underline{D=-1}} \rfloor$$

$$(*) = 10\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt - \frac{1}{t^2+t+1}\,dt\right) = 10\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}\,dt$$

$$= 10\left[\operatorname{arctg}(t) - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= 10\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right) = \underline{\underline{10\pi\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}}.$$

PŘ 5 [3. VÝHODA - LZE POUŽÍT, ŽE FUNKCE JE SUDÁ/LICHÁ]

$$\int_{-5\pi}^{5\pi} |\sin x|\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ |\sin x| \text{ JE SUDÁ FCE}}}{=} 2\cdot\int_0^{5\pi} |\sin x|\,dx \underset{\substack{\downarrow \\ |\sin x| \text{ je } \pi\text{-periodická}}}{=} 10\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx =$$

⌈ OBECNĚ: f je SUDÁ $\Rightarrow \int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 2\int_0^k f(x)\,dx$

DK: $\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = \int_{-k}^{0} f(x)\,dx + \int_0^k f(x)\,dx$

$$= \left|\begin{matrix} t=-x \\ dt = dx \end{matrix}\right| = \int_0^k \underbrace{f(-t)}_{\substack{\| \\ f(t) \;\hookrightarrow f \text{ SUDÁ}}}\,dt + \int_0^k f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^k f(x)\,dx \quad \triangle$$

ANALOGICKY: f je LICHÁ $\Rightarrow \int_{-k}^{k} f(x)\,dx = 0$ ⌋

$$= 10 \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 10 \left[-\cos x \right]_0^{\pi} = \underline{\underline{20}}.$$