

Ordinální čísla

Definice. Necht T je množina.

- Řekneme, že $<$ je *dobré uspořádání* na množině T , pokud $(T, <)$ je lineárně uspořádaná množina a každá neprázdná podmnožina T má nejmenší prvek.
- Řekneme, že T je *ordinál*, pokud ε je dobré uspořádání na T a $T \subset \mathcal{P}(T)$. V takovém případě píšeme $<$ místo ε .
- Všechny ordinály značíme symbolem Ord.

Tvrzení 1. • Necht $\alpha \neq \beta$ jsou ordinály, pak platí buď $\alpha < \beta$ nebo $\beta < \alpha$.

- Necht α je ordinál. Pak $\alpha = \{\beta: \beta < \alpha\}$.
- Pokud C je neprázdná množina ordinálů, pak $\bigcap C$ a $\bigcup C$ jsou ordinály. Navíc,

$$\bigcap C = \inf\{\alpha: \alpha \in C\} \quad a \quad \bigcup C = \sup\{\alpha: \alpha \in C\}.$$

- Necht α je ordinál. Pak $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ je ordinál a $\alpha + 1 = \inf\{\beta: \beta > \alpha\}$. Říkáme, že $\alpha + 1$ je následník α , α je předchůdce $\alpha + 1$.

Pokud ordinál má předchůdce, říkáme že je *izolovaný*. V opačném případě říkáme, že je *limitní*.

Příklady 2. První ordinály vypadají takto:

- $\emptyset$ je nejmenší ordinál, značíme $0 := \emptyset$;
- $1 := 0 + 1$ je druhý nejmenší ordinál, další jsou $2 := 1 + 1$, $3 := 2 + 1$, ..., $10 := 9 + 1$ atd. Každé přirozené číslo je tak ordinálem.
- $\omega := \sup\{n: n \in \mathbb{N}\}$ je první nekonečný ordinál, dalším ordinálem je $\omega + 1$.

Definice. Aritmetické operace na ordinálech jsou definovány takto (rekurzivně, definujeme pojem vždy pro 0, pak pro izolované ordinály a nakonec pak pro limitní ordinály):

- **Sčítání:** $\alpha + 0 := \alpha$, $\alpha + (\beta + 1) := \alpha + \beta + 1$, $\alpha + \beta := \sup\{\alpha + \xi: \xi < \beta\}$ pro β limitní.
- **Násobení:** $\alpha \cdot 0 := 0$, $\alpha \cdot (\beta + 1) := \alpha \cdot \beta + \alpha$, $\alpha \cdot \beta := \sup\{\alpha \cdot \xi: \xi < \beta\}$ pro β limitní.
- **Mocniny:** $\alpha^0 := 1$, $\alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \cdot \alpha$, $\alpha^\beta := \sup\{\alpha^\xi: \xi < \beta\}$ pro β limitní.

Pozor: Operace sčítání a násobení na ordinálech jsou asociativní, ale nejsou komutativní!

Tvrzení 3. Součet/součin/mocnina ordinálů je ordinál. Uspořádání na součtu a součinu ordinálů je dáno pro ordinály α, β takto:

- $\alpha + \beta$ je isomorfní disjunktivnímu sjednocení α a β , kde uspořádání na α a β zůstane zachováno a $a < b$ pro každé $a \in \alpha$ a $b \in \beta$;
- $\alpha + \beta$ je isomorfní množině $\alpha \times \beta$ s lexikografickým uspořádáním, tj. $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ pokud $a_1 < a_2$, nebo $a_1 = a_2$ a zároveň $b_1 < b_2$.

Zajímavost: každé ordinální číslo $\alpha \neq 0$ je možné jednoznačně napsat ve tvaru

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\beta_k} \cdot n_k,$$

kde $\beta_1 > \dots > \beta_k$ a $n_i \in \mathbb{N}$ pro $i = 1, \dots, k$.

Příklady 4. Další ordinální čísla jsou

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \quad \omega \cdot 2, \omega \cdot 2 + 1, \dots, \quad \omega \cdot 3, \quad \dots, \quad \omega^2, \dots, \omega^3, \quad \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^2 \cdot 5 + 4}, \dots$$

Kardinální čísla

Definice. Ordinální číslo α je *kardinál*, pokud neexistuje bijekce na β pro $\beta < \alpha$.

Tvrzení 5. Pro každou množinu X existuje právě jeden kardinál κ takový, že X a κ mají stejnou mohutnost (tj. existuje bijekce mezi X a κ). Pro každou množinu X tento jednoznačně určený kardinál značíme symbolem $|X|$.

Definice. Jsou-li κ, λ kardinály, pak jejich součet, součin a mocninu definujeme předpisem

$$\kappa + \lambda := |\kappa + \lambda|, \quad \kappa \cdot \lambda := |\kappa \cdot \lambda|, \quad \kappa^\lambda := |\{f : \lambda \rightarrow \kappa : f \text{ je funkce}\}|$$

Tvrzení 6. Je-li X množina, pak $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$. Navíc, $\kappa < 2^\kappa$. Speciálně, pro každý kardinál existuje větší kardinál.

Tvrzení 7. Operace součtu a součinu na kardinálních číslech jsou asociativní, komutativní a distributivní. Pokud κ, λ jsou kardinály z nichž alespoň jeden je nekonečný, pak $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

Definice. Řekneme, že ordinál α je spočetný, pokud $|\alpha| \leq \omega$. První nespočetný ordinál značíme symbolem ω_1 (druhý symbolem ω_2 atd).

Uvědomte si, že všechny ordinály z Příkladu 4 jsou spočetné a že supremum spočetných ordinálů je spočetný ordinál.