1. Elementární funkce

Věta 1 (zavedení exponenciální funkce)**.** *Existuje právě jedna funkce* ***exponenciála*** *(budeme ji značit* exp*) splňující podmínky*

(E1) $D(\exp) = \mathbb{R}$

(E2) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y,$

(E3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$

Věta 2 (vlastnosti exponenciální funkce)**.** *Následující vlastnosti exponenciální funkce je možné odvodit pouze z vlastností (E1) a (E2).*

- *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\exp'(x) = \exp x$.
- *Platí* $\exp(0) = 1$.
- *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.
- *Funkce* exp *je spojitá na* $\mathbb{R}$.
- *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\exp x > 0$.
- *Funkce* exp *je rostoucí na* $\mathbb{R}$.
- *Platí* $\lim\limits_{x\to\infty} \exp x = \infty$ *a* $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$.
- *Platí* $H(\exp) = (0, \infty)$.

Definice.

(a) Funkce $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je definována jako inverzní funkce k funkci exp. Nazývá se **přirozeným logaritmem**.

(b) Je-li $a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, pak definujeme

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}, \quad x \in (0,\infty).$$

Funkci $\log_a$ nazýváme **logaritmem o základu** a.

(c) Nechť $a \in \mathbb{R}, a > 0$, a $b \in \mathbb{R}$. Potom definujeme reálné číslo a^b předpisem $a^b = \exp(b \log(a))$.

(d) Nechť $a > 0$. Potom funkci $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme **obecnou mocninou**.

(e) Číslo e definujeme jako $e = \exp(1)$, nazýváme jej **Eulerova konstanta**.

Věta 3 (vlastnosti logaritmu)**.** *Funkce* log *má následující vlastnosti.*

- *Platí* $D(\log) = (0,\infty)$.
- *Platí* $H(\log) = \mathbb{R}$.
- *Funkce* log *je rostoucí na* $(0,\infty)$.
- *Funkce* log *je spojitá na* $(0,\infty)$.
- *Pro každé* $x, y \in (0,\infty)$ *platí* $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

- *Pro každé* $a \in (0, \infty)$ *a* $b \in \mathbb{R}$ *platí* $\log a^b = b \log a$.
- *Pro každé* $x \in (0, \infty)$ *platí* $\log'(x) = \frac{1}{x}$.
- *Platí* $\lim\limits_{x \to 0_+} \log x = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$ *a* $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.

Věta 4 (zavedení sinu a čísla π)**.** *Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit* π*) a jediná funkce* ***sinus*** *(budeme ji značit* sin*), která má následující vlastnosti:*

(S1) $D(\sin) = \mathbb{R}$

(S2) $\sin$ *je rostoucí na* $[-\pi/2, \pi/2]$,

(S3) $\sin 0 = 0$,

(S4) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin(x + y) = \sin x \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \sin y$,

(S5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice. Funkci **kosinus** značíme cos a definujeme předpisem

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Věta 5 (vlastnosti funkcí sin a cos)**.** *Funkce sinus a kosinus mají následující vlastnosti:*

- $\sin$ *je lichá funkce a* $\cos$ *je sudá funkce,*
- *Platí* $\sin x = 0$, *právě když* $x = k\pi$ *pro* $k \in \mathbb{Z}$ *a* $\cos x = 0$, *právě když* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ *pro* $k \in \mathbb{Z}$.
- *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ *a* $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$. *Funkce* sin *a* cos *jsou* π*-antiperiodické (tedy* $\sin(x + \pi) = -\sin x$ *a* $\cos(x + \pi) = -\cos x$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$*), a tedy* 2π*-periodické.*
- $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \& \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
- $\forall x \in \mathbb{R}: \ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \& \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x \quad \& \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,
- $\cos(0) = \sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/6) = \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\pi/3) = \sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$
- *Pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí* $\sin'(x) = \cos x$ *a* $\cos'(x) = -\sin x$.
- *Funkce* sin *a* cos *jsou spojité na* $\mathbb{R}$.

Definice. Funkce **tangens** a **kotangens** značíme tg a cotg a definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x}, & x &\in \mathbb{R} \setminus \left\{ \tfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}, \\ \operatorname{cotg} x &= \frac{\cos x}{\sin x}, & x &\in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

Funkce sin, cos, tg a cotg nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

Věta 6 (vlastnosti funkce tangens)**.** *Funkce* tg *je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, je lichá,* π*-periodická a rostoucí na* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. *Pro každé* $x \in D(\operatorname{tg})$ *platí* $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. *Platí* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}_-} \operatorname{tg} x = \infty$ *a* $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}_+} \operatorname{tg} x = -\infty$.

Věta 7 (vlastnosti funkce kotangens)**.** *Funkce* cotg *je spojitá v každém bodě svého definičního oboru, je lichá,* π*-periodická a klesající na* $(0, \pi)$. *Pro každé* $x \in D(\operatorname{cotg})$ *platí* $\operatorname{cotg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$. *Platí* $\lim_{x\to 0_+} \operatorname{cotg} x = \infty$ *a* $\lim_{x\to\pi_-} \operatorname{cotg} x = -\infty$.

Definice. **Cyklometrické funkce arkussinus**, **arkuskosinus**, **arkustangens** a **arkuskotangens** značíme arcsin, arccos, arctg a arccotg a definujeme předpisy

$$\begin{aligned} \arcsin &= \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}; \\ \arccos &= \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}; \\ \operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}; \\ \operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Věta 8 (vlastnosti cyklometrických funkcí)**.**

(a) *Funkce* arcsin *je spojitá, lichá a rostoucí na* $[-1,1]$*. Platí* $H(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$, *a* $\arcsin'_+(-1) = \arcsin'_-(1) = \infty$.

(b) *Funkce* arccos *je spojitá a klesající na* $[-1,1]$*. Platí* $H(\arccos) = [0,\pi]$. $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$, *a* $\arccos'_+(-1) = \arccos'_-(1) = -\infty$.

(c) *Funkce* arctg *je spojitá, lichá a rostoucí na* $\mathbb{R}$*. Platí* $H(\operatorname{arctg}) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *a* $\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(d) *Funkce* arccotg *je spojitá a klesající na* $\mathbb{R}$*. Platí* $H(\operatorname{arccotg}) = (0,\pi)$ *a* $\operatorname{arccotg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.