KONVERGENCE NEWTONOVA INTEGRÁLU

PŘIPOMEŇ: $f \in \mathcal{N}(a,b) \overset{DEF}{\equiv} (N)\text{-}\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

(TJ. KONVERGUJE)

PŘÍKLADY K VĚTÁM 3.7 – 3.10

PŘ 1 [APLIKACE VĚTY 3.7]

a) Ať $f(x) := \log\left(1 + x^2 + \sin^2(\cos x + 4)\right)$, $x \in \mathbb{R}$

Pak $\int_1^{10} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$, tedy $f \in \mathcal{N}(1,10)$

[Sice neumíme integrál spočítat, ale víme že konverguje dle Věty 3.7, protože $f \in \mathcal{C}([1,10])$]

b) Ať $f(x) := \frac{\log(1+x)}{x}$, $x \in (0,1]$.

Pak $f(0+) = 1$, tedy dle Věty 3.7 rovnou máme $f \in \mathcal{N}((0,1))$ ... i když funkce není v bodě 0 definovaná!

PŘ 2 [APLIKACE VĚTY 3.9, ZKRACUJEME JI „LSK"]

POZN: VÍME (VIZ. SEKCE 3.1): $\int_0^1 x^\alpha\,dx \in \mathbb{R} \iff \alpha > -1$

$\int_1^\infty x^\alpha\,dx \in \mathbb{R} \iff \alpha < -1$

[Tedy, pro každé $K>0$ máme $\int_0^K x^\alpha\,dx \in \mathbb{R} \iff \alpha > -1$

$\int_K^\infty x^\alpha\,dx \in \mathbb{R} \iff \alpha < -1$

protože, pokud (NAPŘÍKLAD) $K > 1$, tak $\int_0^K \dots = \underbrace{\int_0^1}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_1^K}_{\in \mathbb{R} \text{ dle Věty 3.7}}$ $\in \mathbb{R}$]

~~a~~

VYŠETŘETE KONVERGENCI INTEGRÁLŮ:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}\,dx$

Máme $\int_0^1 \dots = \int_0^\delta \dots + \int_\delta^\eta \dots + \int_\eta^1 \dots$ pro každé $0<\delta<\eta<1$.

Označme $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$, pak $f \in \mathcal{C}([\delta,\eta])$, tedy $f \in \mathcal{N}(\delta,\eta)$

Zbývá tedy zjistit konvergenci „u 0" [tj. $\int_0^\delta f(x)\,dx \in \mathbb{R}$?]

a „u 1" [tj. $\int_\eta^1 f(x)\,dx \in \mathbb{R}$?]

„u 0":

Potřebujeme najít $\alpha \in \mathbb{R}$, že $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x^\alpha} \in (0,\infty)$

[pak dle LSK, $f \in \mathcal{N}(0,\delta) \iff x^\alpha \in \mathcal{N}(0,\delta)$]

Máme $f(x) = \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt[3]{\dots}}}_{\to 1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, tedy „se chová jako $x^{-1/2}$".

=> Teď provedeme příslušné výpočty:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} = 1 \in (0,\infty)$$

LSK + FAKT ŽE $\int_0^\delta \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ KONVERGUJE (neboť $-1/2 > -1$)
=>

$f \in \mathcal{N}(0,\delta)$ pro každé $\delta \in (0,1)$

„u 1":

Potřebujeme najít $\alpha \in \mathbb{R}$, že $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)}{(1-x)^\alpha} \in (0,\infty)$.

Máme $f(x) = \underbrace{x^{-1/2}}_{\to 1} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^5 \underbrace{(1+x)^5}_{\to 2}}}$, tedy se

v jedničky „chová jako" $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^5}} = (1-x)^{-5/3}$.

$\Rightarrow$ Teď provedeme příslušné výpočty:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{(1-x)^{-5/3}} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)^{5/3}} = \frac{1}{2^{5/3}} \in (0,\infty)$$

$$\overset{LSK}{\Longrightarrow} \left(f \in \mathcal{M}(\eta,1) \iff (1-x)^{-5/3} \in \mathcal{M}(\eta,1) \right)$$

Zároveň máme $\displaystyle\int_\eta^1 (1-x)^{-5/3}\,dx \underset{t=1-x}{=} \int_0^{1-\eta} t^{-5/3}\,dt$,

protože $-5/3 < -1$, jedná se o divergentní integrál.

$\Rightarrow f \notin \mathcal{M}(\eta,1)$.

CELKEM: INTEGRÁL DIVERGUJE

$$\left[\text{PROTOŽE} = \underbrace{\int_0^\delta}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_\delta^\eta}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_\eta^1}_{=+\infty} = +\infty \right]$$

---

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$

Označme $f(x) := \dfrac{\log(\sin x)}{\sqrt{x}}$. Máme $f \in \mathcal{C}\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$,

tedy integrál konverguje $\iff$ konverguje „v 0" (dle Věty 3.7)

[PODROBNÉ ZDŮVODNĚNÍ ANALOGICKÉ JAKO U Př. 2a)] "v 0":

IDEA: Máme $\frac{|\log(\sin x)|}{\sqrt{x}} << \frac{(\sin x)^{-\alpha}}{\sqrt{x}} \approx \frac{x^{-\alpha}}{\sqrt{x}} = x^{-\alpha-1/2}$

POUŽÍVÁM, ŽE $\log y << y^{-\alpha}$ v nule PRO KAŽDÉ $\alpha > 0$ (tj. $y^{\alpha} \cdot \log y \to 0$)

Zároveň $x^{-\alpha-1/2} \in \mathcal{M}(0,\delta)$ pokud

$-\alpha - 1/2 > -1$, tj. $-\alpha > -1/2$, tj. $\alpha < 1/2$

$\Rightarrow$ VOLBOU $\alpha = 1/4$ DOSTANEME

$|f(x)| \leq x^{-3/4} \Rightarrow f \in \mathcal{M}(0,\delta)$

A TEĎ POŘÁDNĚ:

Máme $\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{|\log(\sin x)|}{\sqrt{x}}}{x^{-3/4}} = \lim_{x \to 0+} x^{1/4} |\log(\sin x)|$

$\overset{VAL}{=} \lim_{x \to 0+} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{1/4} \cdot \lim_{x \to 0+} (\sin x)^{1/4} |\log(\sin x)|$

$\overset{VOLSF}{=}$ 1. $\lim_{y \to 0+} y^{1/4} |\log(y)| = 0$

POKUD JI NEZNÁTE, ZAPAMATUJTE SI JI!

$\boxed{\text{ZNÁMÁ LIMITA: } \lim_{y \to 0+} y^{\alpha} |\log y| = 0 \text{ pro } \alpha > 0}$

[DŮKAZ: POUŽIJI VOLSF, KDE "$-\log y = z$"

$\lim_{y \to 0+} y^{\alpha} |\log y| \overset{VOLSF}{=} \lim_{z \to +\infty} \frac{z}{e^{\alpha z}} \overset{l'H(\frac{\infty}{\infty})}{=}$

$= \lim_{z \to +\infty} \frac{1}{\alpha e^{\alpha z}} = 0$]

~~Tedy, dle definice limity, existuje $\delta > 0$ že~~

Tedy, dle definice limity, existuje $\delta > 0$ že

$$|f(x)| \leq x^{-3/4}, \quad x \in (0, \delta)$$

Protože $x^{-3/4} \in \mathcal{M}(0,\delta)$, dostáváme dle Věty 3.8

že $|f| \in \mathcal{M}(0,\delta)$, a tedy dle Věty 3.10 máme $f \in \mathcal{M}(0,\delta)$.

CELKEM: „u 0" je integrál OK, a tedy

$$f \in \mathcal{M}(0, \tfrac{\pi}{2}).$$

---

c) $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,\log(1+e^x)}\,dx}$

Označme $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}\,\log(1+e^x)}$. Máme $f \in \mathcal{C}((0,\infty))$,

tedy integrál konverguje $\iff$ konverguje „u 0" a „u ∞".

„u 0":

IDEA: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,\underbrace{\log(1+e^x)}_{\to \log 2}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow$ K-JE

POŘÁDNĚ:

Máme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log(1+e^x)} \in (0,\infty)$

LSK + FAKT že $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{M}(0,\delta)$
$\Rightarrow$ $f \in \mathcal{M}(0,\delta)$ pro každé $\delta > 0$.

„u ∞":

IDEA: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,\log(1+e^x)} \approx \dfrac{1}{x\sqrt{x}} \Rightarrow$ K-JE

$\log(1+e^x) \approx \log(e^x) = x$

POŘÁDNĚ:

Máme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log(1+e^{x})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\frac{\log(1+e^{-x})}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{\log(1+e^{-x})}{x}}_{\to 0}} = 1 \in (0,\infty)$$

$$\log(1+e^{x}) = \log\left(e^{x}(1+e^{-x})\right) = \log(e^{x}) + \log(1+e^{-x})$$
$$= x + \log(1+e^{-x})$$

LSK + FAKT, že $\frac{1}{x\sqrt{x}} \in \mathcal{M}(k,\infty)$ $\Longrightarrow$ $f \in \mathcal{M}(k,\infty)$ pro každé $k>0$.

CELKEM:

Integrál je k-ní „u 0" i „u ∞",

tedy je konvergentní.

ZNÁMÉ LIMITY, CO SE MOHOU HODIT:

- $\lim_{z\to 0^+} z^{\alpha} \log z = 0$, $\alpha > 0$ [VIZ. VÝŠE]

- PRO $x \to \infty$ MÁME

$$1 \ll \log x \ll x^{k} \ll a^{x} \qquad (k>0,\ a>1)$$

KDE SYMBOL $f(x) \ll g(x)$ ZNAMENÁ $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,

EKVIVALENTNĚ $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

⌈Dk: JEDNODUCHÉ POMOCÍ L'H⌋

d) $\boxed{\int_1^\infty \frac{\sqrt{\log x}}{x^2}\,dx}$

Zadaná funkce je spojitá na $[1, \infty)$, tedy integrál konverguje $\iff$ konverguje „u ∞"

„u ∞" : IDEA: $\frac{\sqrt{\log x}}{x^2} << \frac{x^{\alpha/2}}{x^2} = x^{\alpha/2 - 2}$ K-JE POKUD $\alpha/2 - 2 < -1$ (tj. $\alpha < 2$)

$\rightsquigarrow$ VOLBA $\alpha = 1$ BUDE STAČIT

$\hookrightarrow \alpha/2 - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

POŘÁDNĚ:

Máme
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{\log x}}{x^2}}{x^{-3/2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\log x}{x}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ZNÁMÁ LIMITA}}}{=} 0$$

Tedy, dle definice limity, existuje $K > 0$ že
$$\frac{\sqrt{\log x}}{x^2} \leq x^{-3/2}, \quad x > K$$

Protože $x^{-3/2} \in \mathcal{N}(K, \infty)$, dostáváme dle Věty 3.8 že $\frac{\sqrt{\log x}}{x^2} \in \mathcal{N}(K, \infty)$

CELKEM: Zadaná funkce má konvergentní integrál u nekonečna, tedy zadaný integrál je konvergentní!

ZÁVĚREČNÉ DVĚ METODY PRO PŘÍKLADY NA K-CI INTEGRÁLU:

(PŘ) VYŠETŘETE KONVERGENCI INTEGRÁLU

$$\cancel{\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}{\sqrt{e^{2x}-e^x}\,(1-x)^{3/2}}\,dx} \qquad \int_0^1 \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}{\sqrt{e^{2x}-e^x}\;(1-x)^{3/2}}\,dx$$

Γ ⊙ zadaná fce je spojitá na $(0,1)$ $\Rightarrow$ integrovatelná na $[\delta, \eta]$ pro každé $0<\delta<\eta<1$.

Stačí teď zjistit konvergenci „u 0" a „u 1":

„u 0":

IDEA: $\approx \dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}-e^x}} = \dfrac{1}{\sqrt{e^x(e^x-1)}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow k.$

POŽADOVANÉ:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}{\sqrt{e^{2x}-e^x}\,(1-x)^{3/2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} \overset{AL}{=} \frac{\pi}{4} \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{x}{e^{2x}-e^x}}$$

$$= \frac{\pi}{4} \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{x}{e^x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^x}} \overset{AL+Z.L.}{=} \frac{\pi}{4} \in (0,\infty)$$

LSK + FAKT ŽE $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\delta)$ $\Rightarrow$

ZADANÁ FCE MÁ „U 0" KONVERGENTNÍ INTEGRÁL

„u 1": ČITELNĚJI NA DALŠÍ STRANĚ

IDEA: $\dfrac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}{(1-x)^{3/2}}$ $\approx$

$\approx$

$\left[\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \in \mathbb{R} \right.$

... TEDY SE BUDE CHOVAT JAKO „$(1-x)$"

OBECNĚJI: KDYŽ NEVÍM JAK SE CHOVÁ $f(x)$, ZDERIVUJI JI. KDYŽ $f'(x) \approx g(x)$ PAK $f(x) \approx \int g(x)$

$f(x) \approx (8-x)^{\alpha}$ POKUD $f^{(k)}(8) = 0$ PRO $k \leq \alpha - 1$

ALE $f^{(\alpha)}(8) \neq 0$

~~OBECNĚJI: ZJISTÍM JAK SE CHOVÁ DERIVACE A PAK TO ZINTEGRUJU~~

„u 1":

IDEA: $\approx \dfrac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}{(1-x)^{3/2}} \approx \dfrac{(1-x)}{(1-x)^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow k.$

viz.

JAK SE CHOVÁ $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x$? NEVÍM ... ZKUSÍM

ZJISTIT JAK SE CHOVÁ DERIVACE:

$$\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x\right)' = \frac{-1}{1+x^2} \xrightarrow[x\to 1]{} -1 \text{ GR}$$

DERIVACE SE TEDY CHOVÁ JAKO -1

MÁME $\int -1 \overset{c}{=} -x$, TAKŽE $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x$ SE BUDE

CHOVAT JAKO „$(1-x)$" $[-x+C$
KONSTANTA, ABY LIMITA V „1" BYLA NULA$]$

[$\Rightarrow$ OBECNĚ: KDYŽ NEVÍM JAK SE CHOVÁ $f(x)$
TAK JI ZDERIVUJU, ZJISTÍM JAK SE
CHOVÁ $f'(x)$ A POUŽIJU
„$f'(x) \approx g(x) \Rightarrow f(x) \approx \int g(x)$"]

POŘÁDNĚ:

Máme

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\dfrac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}{(1-x)^{3/2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}{1-x}$$

$$\overset{L'H\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{\dfrac{-1}{1+x^2}}{-1} = 1 \in (0,\infty)$$

LSK + FAKT ŽE $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{M}(y,1)$
$\Rightarrow$
ZADANÁ FUNKCE MÁ „u 1" KONVERGENTNÍ INTEGRÁL

CELKEM: ZADANÝ INTEGRÁL JE KONVERGENTNÍ $\perp$

(P2) SLOŽITĚJŠÍ S PODOBNÝM TRIKEM:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}}\, dx$$

[MŮŽETE POUŽÍT, ŽE PRO $x \in (0, \frac{\pi}{3})$ JE $\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \neq 0$]

Γ ZADANÁ FCE JE SPOJITÁ V $[0, \frac{\pi}{3})$, ~~JE NUTNÉ~~

$\Rightarrow$ INTEGRÁL PŘES $(0, y)$ JE KONVERGENTNÍ PRO KAŽDÉ $y \in (0, \frac{\pi}{3})$.

ZBÝVÁ VYŠETŘIT KONVERGENCI INTEGRÁLU „V $\frac{\pi}{3}$"

„V $\frac{\pi}{3}$":

IDEA: • JAK SE CHOVÁ $\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$?

(ASI JAKO $(\frac{\pi}{3} - x)^\alpha$ ... KOLIK JE ALE α ?)

ZDERIVUJ!:

$$\left(\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)' = \frac{1}{2} - \cos x$$

$\rightsquigarrow$ POKUD $\frac{1}{2} - \cos x$ SE CHOVÁ JAKO $(\frac{\pi}{3} - x)^\alpha$

PAK $\left(\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ SE BUDE CHOVAT

JAKO $\left(\frac{\pi}{3} - x\right)^{\alpha+1}$

• JAK SE CHOVÁ $\frac{1}{2} - \cos x$ V $\frac{\pi}{3}$? NEVÍM $\Rightarrow$ ZDERIVUJ:

$$\left(\frac{1}{2} - \cos x\right)' = \sin x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{3}]{} \frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \cos x\right)'$ SE CHOVÁ JAKO $\left(\frac{\pi}{3} - x\right)^0 = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \cos x\right)$ — „ — $\left(\frac{\pi}{3} - x\right)^1$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ — „ — $\left(\frac{\pi}{3} - x\right)^2$

TEDY $\frac{1}{\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}} \approx \frac{1}{\left(\frac{\pi}{3} - x\right)^2} \Rightarrow D.$

POŘÁDNĚ:

Máme

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}^-} \frac{\frac{1}{\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}}}{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{3} - x\right)^2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{3} - x\right)^2}{\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}}$$

$$\overset{l'H\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{3}^-} \frac{-2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{\frac{1}{2} - \cos x} \overset{l'H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{3}^-} \frac{2}{-\sin x}$$

$$= -\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \in (-\infty, 0)$$

Tedy: $\exists \delta > 0 : \forall x \in \left(\frac{\pi}{3} - \delta, \frac{\pi}{3}\right) : \left(\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) < 0$

a proto na okolí $\frac{\pi}{3}$ zleva je $-\left(\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) < 0$

LSK + FAKT ŽE $\int_{\frac{\pi}{3} - \delta}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{3} - x\right)^2}\,dx$ JE DIVERGENTNÍ
$\Rightarrow$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-1}{\frac{x}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}}\,dx \quad \text{JE DIVERGENTNÍ}$$

$\Rightarrow$ ZADANÝ INTEGRÁL JE DIVERGENTNÍ