PŘ 1 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x + \operatorname{tg} x}\, dx$

1. STRANA

OZNAČME $f(x) := \dfrac{1}{\sin x + \operatorname{tg} x}$. DEFINIČNÍ OBOR f:

1) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (ABY BYL DEF $\operatorname{tg} x$)

2) $\sin x \neq -\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x \neq 0 \ \&\ \cos x \neq -1$

$\Rightarrow x \neq \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \&\ x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

CELKEM: $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, \pi) + k\pi \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left((k\pi, \tfrac{\pi}{2} + k\pi) \cup (\tfrac{\pi}{2} + k\pi, k\pi) \right)$

$\Rightarrow$ PRIM. FCI HLEDÁME NA INTERVALECH

$(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ A $(\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

NA TĚCHTO INTERVALECH MÁME:

$$\int \frac{1}{\sin x + \operatorname{tg} x}\, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \end{array} \right| = \int \frac{-t}{(1-t^2)(1+t)}\, dt = (*) \text{ NÍŽE}$$

POZN: $t \in (-1, 0)$ ⟶ ODPOVÍDÁ $x \in (0, \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$ NEBO $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi) + 2k\pi$

NEBO $(0, 1)$ ⟶ ODPOVÍDÁ $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) + 2k\pi$ NEBO $(\pi, \frac{3}{2}\pi) + 2k\pi$

$f(x) = R(\sin x, \cos x)$

KDE $R(a, b) = \dfrac{1}{a + \frac{a}{b}} = \dfrac{b}{ab + a}$.

PLATÍ

$R(-a, b) = -R(a, b)$

$\Rightarrow$ PROTO VOLÍME

SUBSTITUCI $t = \cos x$

ROZLOŽME NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY:

$$\frac{-t}{(1-t)(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2}$$

$$\Rightarrow -t = A(1+t)^2 + B(1+t)(1-t) + C(1-t)$$

- DOSAĎ $t = -1 \Rightarrow C = 1/2$; DOSAĎ $t = 1 \Rightarrow A = -1/4$

• TEDY :

$$-t = -\frac{1}{4}(1+t)^2 + B(1+t)(1-t) + \frac{1}{2}(1-t)$$
$$= t^2\left(-\frac{1}{4} - B\right) + \ldots$$

POROVNÁNÍM KOEFICIENTŮ U t^2 : $0 = -\frac{1}{4} - B \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$ ┘

$$(*) = \int \frac{1}{4}\frac{1}{t-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(t+1)^2}\,dt \overset{c}{=} \frac{1}{4}\left(\log|t-1| - \log|t+1|\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{t+1}$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\cos x}$$ PRO $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ A $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \pi+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

PŘ 2 $\boxed{\int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\sin^2 x + \sin x \cos x}\,dx}$

OZNAČME $f(x) := \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\sin^2 x + \sin x \cos x}$

DEFINIČNÍ OBOR f :
- $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (ABY BYL DEF. TG X)
- $\sin x \neq 0$ & $\sin x + \cos x \neq 0$

$\Rightarrow$ $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ & $\operatorname{tg} x \neq -1$

$\Rightarrow$ —— // —— $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$

CELKEM :
$$D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{0, -\frac{\pi}{4}\right\} + k\pi$$
$$= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, -\frac{\pi}{4}+k\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\pi\right) \cup \left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

NA TĚCHTO INTERVALECH HLEDÁME PRIM. FCI.

MÁME

$$\frac{tg^2 x + 1}{\sin^2 x + \sin x \cos x} = R(\sin x, \cos x), \text{ kde } R(a,b) = \frac{\frac{a^2}{b^2}+1}{a^2+ab},$$

PROTOŽE PLATÍ $R(-a,-b) = R(a,b)$, BUDEME VOLIT SUBSTITUCI „$t = tg\, x$“

POZN.: MÁME $\frac{1}{tg^2 x + 1} = \cos^2 x$, TEDY $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}}$, $\boxed{\sin^2 x = 1-\cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}}$

POČÍTEJME:

$$\int \frac{tg^2 x + 1}{\sin^2 x + \sin x \cos x}\, dx = \int \frac{\overbrace{(tg^2 x + 1)\cos^2 x}^{=1}}{(\sin^2 x + tg\, x \cos^2 x)} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \left| \begin{matrix} t = tg\, x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2} + t\frac{1}{1+t^2}}\, dt$$

POZN.: $t \in (-\infty, -1) \rightsquigarrow$ ODPOVÍDÁ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, -\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$

NEBO $t \in (-1, 0) \rightsquigarrow$ —″— $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\pi\right)$

NEBO $t \in (0, \infty) \rightsquigarrow$ —″— $\left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

$$= \int \frac{t^2+1}{t^2+t}\, dt = (*)^{\text{NÍŽE}}$$

ROZKLAD NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY:

- $\frac{t^2+1}{t^2+t} = 1 + \frac{1-t}{t^2+t}$
- $\frac{1-t}{t^2+t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t} \Rightarrow 1-t = At + B(t+1)$
  - DOSAĎ $t=0 \Rightarrow B = 1$
  - DOSAĎ $t=-1 \Rightarrow A = -2$

$$\circledast = \int 1 + \frac{1}{t} - 2\,\frac{1}{1+t}\,dt \overset{c}{=} t + \log|t| - 2\log|t+1|$$

$$= \underline{\operatorname{tg} x + \log|\operatorname{tg} x| - 2\log|\operatorname{tg} x + 1|}$$

pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$

$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi\right)$

a $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

PŘ 3 ! POZOR, PŘI POUŽITÍ SUBSTITUCE „$\operatorname{tg} x = t$"

JE NĚKDY POTŘEBA „LEPIT"

$$\boxed{\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx}$$

- DEFINIČNÍ OBOR ZKOUMANÉ FUNKCE JE $(-\infty, \infty)$
- SNADNO SI ROZMYSLÍME, ŽE BYCHOM DLE OBECNÉHO NÁVODU MĚLI POUŽÍT SUBSTITUCI „$t = \operatorname{tg} x$"

! ALE $\operatorname{tg} x$ JE DEFINOVÁN PRO $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

=> TÍMTO ZPŮSOBEM NAJDEME PRIM. FCI NA INTERVALECH $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

ZADANÁ FUNKCE JE DEFINOVÁNA NA $\mathbb{R}$ => BUDE TŘEBA NA ZÁVĚR PROVÉST „LEPENÍ".

POČÍTEJME TEDY:

NA INTERVALECH $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ MÁME

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \end{array} \right| = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}}{\left(\frac{t^2}{1+t^2} + 4\,\frac{1}{1+t^2}\right)(1+t^2)}\,dt$$

Pozn: $t \in (-\infty, \infty)$

UŽ VÍME (VIZ. PŘ 2):

„$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$"

„$\sin^2 x = t^2/(1+t^2)$"

$$= \int \frac{t^2-1}{(t^2+4)(1+t^2)}\, dt = (*)^{\text{NÍŽE}}$$

ROZKLAD NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY:

$$\frac{t^2-1}{(t^2+4)(t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+4} + \frac{Ct+D}{t^2+1} \Rightarrow t^2-1 = (At+B)(t^2+1) + (Ct+D)(t^2+4)$$

POROVNÁME KOEFICIENTY U JEDNOTLIVÝCH MOCNIN „t":

$\underline{t^3}$: $0 = A + C$ $\qquad$ $\underline{t}$: $0 = A + 4C$

$\underline{t^2}$: $1 = B + D$ $\qquad$ $\underline{t^0}$: $-1 = B + 4D$

$$\Rightarrow A = C = 0 \;;\; -1 = B+4D = 1+3D \Rightarrow D = -\frac{2}{3} \;;\; B = \frac{5}{3}$$

$$(*) = \int \frac{5}{3}\,\frac{1}{t^2+4} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{t^2+1}\, dt = -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(t) + \frac{5}{3}\int \frac{1}{4}\,\frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\, dt$$

$$\stackrel{c}{=} -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(t) + \frac{5}{12}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)\cdot 2$$

$$= -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + \frac{5}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right)$$

POZOR:

1) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ PRO $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ALE JINAK NE

$\Rightarrow$ PROTO RADĚJI PÍŠEME $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ A NEZJEDNODUŠUJEME

2) TO NENÍ VÝSLEDEK, PROTOŽE VYŠLA FUNKCE, KTERÁ NENÍ DEFINOVÁNA PRO $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ JE TŘEBA JEŠTĚ „LEPIT", TJ. SPOJITĚ FUNKCI DODEFINOVAT V BODECH $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

SHRŇME CO VÍME:

POLOŽ PRO $C_k \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{F}(x) := -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + \frac{5}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + C_k \quad , x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

PAK

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} \tilde{F}(x) = -\frac{2}{3}\,\frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\,\frac{\pi}{2} + C_k = \frac{\pi}{12} + C_k$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+} \tilde{F}(x) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{5}{6}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + C_k = -\frac{\pi}{12} + C_k$$

TEDY, ABY BYLA $\tilde{F}$ SPOJITÁ V $\frac{\pi}{2}+k\pi$, MUSÍ PLATIT:

$$\frac{\pi}{12} + C_k = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-} \tilde{F}(x) = \lim_{x\to\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}_{=-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi}^+} \tilde{F}(x) = -\frac{\pi}{12} + C_{k+1}$$

$\Rightarrow C_{k+1} = C_k + \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow$ LZE ZVOLIT NAPŘ. $C_k = k\frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$

<u>CELKEM</u>:

PRIMITIVNÍ FUNKCE K FUNKCI $\dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x + 4\cos^2 x}$ NA $\mathbb{R}$

JE FUNKCE $F(x)$ DEFINOVANÁ PŘEDPISEM

$$F(x) := \begin{cases} -\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + \frac{5}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + k\frac{\pi}{6}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6} & , x = \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

PŘ 4

PODOBNĚ JAKO V PŘ 3 NASTÁVAJÍ CELKEM ČASTO POTÍŽE PŘI SUBSTITUCI „$t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$". TATO SICE „FUNGUJE VŽDY", ALE ČASTO VEDE KE SLOŽITĚJŠÍM VÝPOČTŮM A K ŘEŠENÍ => JE DOBRÉ SE K NÍ UCHYLOVAT AŽ JAKO K POSLEDNÍ MOŽNOST !.

PROČ „FUNGUJE VŽDY":

POKUD $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, PAK

- $\boxed{\cos x} = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

$$= \frac{2}{1+t^2} - 1 = \boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$\frac{1}{\mathrm{tg}^2+1} = \cos^2$

- $\boxed{\sin x} = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} \cos^2\frac{x}{2} = \boxed{\frac{2t}{1+t^2}}$

$$\boxed{\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\, dx}$$

- DEFINIČNÍ OBOR ZKOUMANÉ FCE JE $(-\infty, \infty)$
- SNAD NO SI ROZMYSLÍME, ŽE DLE OBECNÉHO NÁVODU NEMÁME JINOU MOŽNOST NEŽ ZKUSIT SUBSTITUCI „$t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$"

ALE $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ JE DEFINOVÁN NA $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$

=> TÍMTO ZPŮSOBEM NAJDEME PRIM. FCI NA INTERVALECH $(-\pi, \pi) + 2k\pi$ A BUDE TŘEBA LEPIT

POČÍTEJME TEDY:

NA INTERVALECH $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ MÁME

$$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dt = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx \\ \text{POZN.: } t \in \mathbb{R} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{1}{\frac{4t-(1-t^2)}{1+t^2} + 5} \cdot 2\,\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

UŽ VÍME $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

" $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$= \int \frac{2}{4t - 1 + t^2 + 5(1+t^2)}\,dt = \int \frac{2}{6t^2 + 4t + 4}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\Big(\underbrace{\sqrt{3}\,t + \frac{1}{\sqrt{3}}}_{=\frac{3t+1}{\sqrt{3}}}\Big)^2 + \frac{5}{3}}\,dt = \frac{3}{5}\int \frac{1}{\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1}\,dt$$

$6t^2+4t+4$ NEMÁ $\mathbb{R}$ KOŘEN ⇒ JEDNÁ SE O „PARCIÁLNÍ ZLOMEK"

$$\overset{c}{=} \frac{\cancel{3}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right)$$

TO ALE JEŠTĚ NENÍ VÝSLEDEK (JAK JSME ŘEKLI DŘÍVE, JE TŘEBA LEPIT – PODOBNĚ JAKO V PŘ 3)

SHRŇME CO VÍME:

$$\tilde{F}(x) := \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \right) + c_k, \quad x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

PAK $\quad \tilde{F}'(x) = \dfrac{1}{2\sin x - \cos x + 5} \quad , x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

POKUD SE NÁM TEDY PODAŘÍ $\tilde{F}$ SPOJITĚ DODEFINOVAT V BODECH $\{\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, PAK DLE VĚTY 2.7 (O LEPENÍ), $\tilde{F}$ BUDE PRIMITIVNÍ FUNKCE K $\dfrac{1}{2\sin x - \cos x + 5}$ NA $\mathbb{R}$.

MÁME:

$$\lim_{x \to (\pi + 2k\pi)^-} \tilde{F}(x) = \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{\pi}{2} + c_k$$

$$\lim_{x \to \underbrace{(\pi + 2k\pi)}_{-\pi + 2(k+1)\pi}{}^+} \tilde{F}(x) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c_{k+1}$$

$\Rightarrow$ ABY BYLA $\tilde{F}$ SPOJITÁ V $\pi + 2k\pi$, MUSÍ PLATIT

$$c_{k+1} - \frac{\pi\sqrt{5}}{10} = c_k + \frac{\sqrt{5}\pi}{10}$$

$$\Rightarrow c_{k+1} = c_k + \frac{\sqrt{5}\pi}{5} \quad \Rightarrow \text{LZE ZVOLIT NAPŘ.}$$

$$c_k = k\frac{\sqrt{5}\pi}{5}$$

CELKEM: $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 5}\, dx \stackrel{c}{=} F(x)$ na $\mathbb{R}$, KDE

$$F(x) := \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \right) + k\dfrac{\sqrt{5}}{5}\pi, & x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\sqrt{5}}{10}\pi + k\dfrac{\sqrt{5}}{5}\pi, & x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

INTEGRÁLY S ODMOCNINOU

1. RACIONALIZACE INTEGRÁLU TVARU $\int R\left(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$:

PŘ 1 $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\, dx$

ZADANÁ FUNKCE MÁ DEF. OBOR DANÝ PODMÍNKOU:

• $x \neq 0$ & $x \neq 2$ & $\frac{x-1}{2-x} \geq 0$ $\left(\Leftrightarrow \underbrace{x \geq 1 \;\&\; 2-x \geq 0}_{x \in [1,2]}, \text{ nebo } \underbrace{x \leq 1 \;\&\; 2 \leq x}_{\text{NELZE}} \right)$

$\Leftrightarrow x \in [1,2)$

$\Rightarrow$ PRIM. FCI HLEDÁM NA INTERVALU $(1,2)$

~~NA TOMTO INTERVALU MÁME:~~ $\cancel{\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\, dx = \left| t = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} \right.}$

BUDU CHTÍT POUŽÍT 2. VOS, KDE $t = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$.

SPOČTU TEDY, ČEMU SE ROVNÁ „x":

$$t^2 = \frac{x-1}{2-x} \Rightarrow t^2(2-x) = x-1 \Rightarrow 2t^2+1 = x + xt^2$$

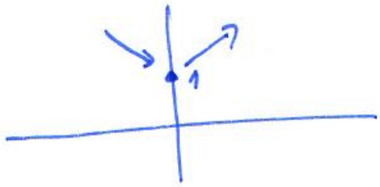
$$\Rightarrow x = \frac{2t^2+1}{t^2+1} =: \varphi(t)$$

PAK $\displaystyle \varphi'(t) = \frac{4t(1+t^2) - 2t(2t^2+1)}{(1+t^2)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$

ZBÝVÁ ZJISTIT, KTERÝ INTERVAL ZOBRAZÍ φ NA $(1,2)$:

obr.: (DERIVACE $>0 \Leftrightarrow t>0$; tj. PRO $t \in (0,\infty)$ φ ROSTE); $\varphi(0) = 1$)

$\varphi(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{2t^2+1}{t^2+1} = 2$



$$\Rightarrow \underline{\underline{\varphi((0,\infty)) = (1,2)}}$$

TEDY, NA INTERVALU $(1,2)$ MÁME

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\, dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \\ t \in (0,\infty) \end{array} \right| = \int \frac{1}{\varphi(t)} \cdot t \cdot \varphi'(t)\, dt =$$

$$= \int \frac{\cancel{t^2+1}}{2t^2+1}\cdot t \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^{\cancel{2}}}\,dt = 2\int \frac{t^2}{(1+t^2)(2t^2+1)}\,dt = (*)$$

PARCIÁLNÍ ZLOMKY:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(2t^2+1)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{2t^2+1}$$

$$t^2 = (At+B)(2t^2+1) + (Ct+D)(t^2+1) = t^3(2A+C) + t^2(2B+D) + t(A+C) + (B+D)$$

POROVNÁNÍM KOEFICIENTŮ PŘED MOCNINAMI „t" DOSTÁVÁME:

$$0 = 2A+C = A+C = B+D \quad \& \quad 2B+D = 1$$

$$\Rightarrow A = 0 = C \; ; \; D = -B \; ; \; B = 1$$

$$(*) = 2\left(\int \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int \frac{1}{2t^2+1}\,dt\right) \overset{c}{=} 2\left(\operatorname{arctg}(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,t)\right)$$

$$= 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\right) - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\right) \quad \text{PRO } x\in(1,2)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

---

2. RACIONALIZACE INTEGRÁLU $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, KDE „$ax^2+bx+c$" MÁ 2 RŮZNÉ REÁLNÉ KOŘENY

PŘ 2 $\quad \int \sqrt{-x^2+6x-5}\,dx$

ZADANÁ FCE MÁ DEF. OBOR ZADANÝ PODMÍNKOU:

$$-x^2+6x-5 \geq 0 \quad \left(\Leftrightarrow -(x-1)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x\in[1,5]\right)$$

$\Rightarrow$ PRIM. FCI HLEDÁME NA INTERVALU $(1,5)$.

NA TOMTO INTERVALU MÁME

$$\int \sqrt{-x^2+6x-5}\,dx = \int \sqrt{-(x-1)(x-5)}\,dx \overset{x>1\,!}{=} \int (x-1)\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}\,dx$$

Nyní pokračujeme analogicky jako u příkladu 1:

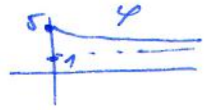
- Chceme použít substituci „$t = \sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$", ale budeme používat 2. vos. Vyjádříme tedy „x":

$$t = \sqrt{\frac{5-x}{x-1}} \underset{\text{pro } x\in(1,5)}{\iff} t^2 (x-1) = 5-x \iff -(t^2+5) = -x(1+t^2)$$

$$\iff x = \frac{5+t^2}{1+t^2} =: \varphi(t)$$

$$\varphi'(t) = \frac{2t(1+t^2) - 2t(5+t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{-8t}{(1+t^2)^2}$$

φ je klesající na $(0,\infty)$, $\varphi(0)=5$, $\varphi(\infty)=1$ $\Rightarrow$ obr.



$\Rightarrow$ $\varphi((0,\infty)) = (1,5)$

- Tedy:

$$\int (x-1)\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}\,dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \\ t \in (0,\infty) \end{array} \right| = \int (\varphi(t)-1)\cdot t \cdot \varphi'(t)\,dt$$

$$= \int \frac{4}{(1+t^2)} \cdot t \cdot \frac{-8t}{(1+t^2)^2}\,dt = -32\int \frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,dt = (*)^{\text{MEZE}}$$

$$\left\ulcorner \frac{t^2}{(1+t^2)^3} \underset{\text{označ } u = t^2}{=} \frac{u}{(1+u)^3} = \frac{A}{(1+u)^3} + \frac{B}{(1+u)^2} + \frac{C}{1+u}\right.$$

$$u = A + B(1+u) + C(1+u)^2$$

dosaď $u=-1$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A=-1}}$

porovnej koeficienty „u^2" $\Rightarrow$ $\underline{\underline{C=0}}$

tedy $u = -1 + B + Bu$ $\Rightarrow$ $\left.\underline{\underline{B=1}}\right\lrcorner$

$$(*) = -32\left(\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt - \int \frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt\right) = (**)^{\text{DÁLE}}$$

⌈ NYNÍ POUŽIJEME INDUKTIVNÍ VZOREC DOKÁZANÝ NA PŘEDNÁŠCE (VIZ. POZNÁMKY K PŘEDNÁŠCE – STR. 5, KONEC SEKCE 2.2):

- $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^3}\,dt = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt \overset{c}{=} \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t)$ ⌋

$$(**) = -32\left(\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt - \frac{t}{4(t^2+1)^2} - \frac{3}{4}\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt\right)$$

$$\overset{c}{=} -32\left(\frac{1}{4}\left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right) - \frac{t}{4(t^2+1)^2}\right)$$

$$= -\cancel{8}4\operatorname{arctg} t + 8t\underbrace{\left(\frac{1}{(t^2+1)^2} - \frac{1}{2(t^2+1)}\right)}_{=\frac{2-(t^2+1)}{2(t^2+1)^2} = \frac{1-t^2}{2(t^2+1)^2}}$$

$$= -4\operatorname{arctg} t + 4t\,\frac{1-2t^2}{(t^2+1)^2} = -4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}} + 4\,\frac{1-\frac{5-x}{x-1}}{\left(\frac{5-x}{x-1}+1\right)^2}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$$

$$= -4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}} + 4\,\frac{(x-1)-(5-x)}{(5-x+(x-1))^2}(x-1)\sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$$

$$= -4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}} + 4\,\frac{2(x-3)}{16}\sqrt{(5-x)(x-1)} = \underline{\underline{-4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5-x}{x-1}} + \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{-x^2+6x-5}}}$$

PRO $x \in (1,5)$.

---

3. EULEROVA SUBSTITUCE

DÁVÁ ČASTO SLOŽITĚJŠÍ VÝRAZY, ALE FUNGUJE ZCELA OBECNĚ.

IDEA: POKUD $a>0$, $b^2-4ac \neq 0$, PAK LZE VŽDY POUŽÍT SUBSTITUCI
„$t = \sqrt{a}\,x + \sqrt{ax^2+bx+c}$“

POPIS PŘÍSLUŠNÉ FUNKCE $\varphi(t)$ (PRO POUŽITÍ 2. VOS) NÁM ZCELA OBECNĚ DÁVÁ FAKT 2.9

DŮKAZ FAKTU 2.9:

Ať $t = \sqrt{a}\, x + \sqrt{a x^2 + bx + c} =: \psi(x)$

Pak $\psi'(x) = \sqrt{a} + \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} \neq 0$

PROTOŽE $\sqrt{a} + \dfrac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} = 0$

$\iff -\sqrt{a}\, 2\sqrt{ax^2+bx+c} = 2ax + b \quad |^2$

$4a(\cancel{ax^2} + \cancel{bx} + c) = \cancel{4a^2x^2} + \cancel{4axb} + b^2$

$\Rightarrow b^2 = 4ac$ ↯ NELZE DLE PŘEDPOKLADU

$\Rightarrow \psi(x)$ BUĎ ROSTE, NEBO KLESÁ

NA KAŽDÉM INTERVALU SVÉHO DEF. OBORU

POZN.: $ax^2+bx+c > 0$ BUĎ PRO $x \in \mathbb{R}$

NEBO PRO $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

$\Rightarrow$ DEF. OBOR $\psi(x)$ JE BUĎ $\mathbb{R}$ NEBO SJEDNOCENÍ DVOU INTERVALŮ

$\Rightarrow \psi$ JE PROSTÉ (PROTOŽE JE RYZE MONOTÓNNÍ)

ZÁROVEŇ $\psi(x) = t \iff \sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\, x \quad |^2$

$\iff \cancel{ax^2} + bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}\, t x + \cancel{ax^2}$

$\iff x = \dfrac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\, t + b}$

TEDY $\psi^{-1}(t) = \dfrac{t^2 - c}{2\sqrt{a}\, t + b} =: \varphi(t)$

ZÁROVEŇ $\varphi'(t) = \dfrac{2t(2\sqrt{a}\, t + b) - 2\sqrt{a}(t^2 - c)}{(2\sqrt{a}\, t + b)^2} = 2\,\dfrac{\sqrt{a}\, t^2 + bt + \sqrt{a}\, c}{(2\sqrt{a}\, t + b)^2}$

$\neq 0$ PROTOŽE $\varphi = \psi^{-1}$ JE MONOTÓNNÍ NA KAŽDÉM INTERVALU SVÉHO DEF. OBORU $\boxtimes$

PŘ 3

$$\int \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx$$

DEF. OBOR ZKOUMANÉ FCE JE $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ => PRIM. FCI HLEDÁME NA $(-\infty,0)$ a NA $(0,\infty)$.

CHCEME POUŽÍT „EULEROVU SUBSTITUCI" „$t = x + \sqrt{x^2+x+1}$"

DLE FAKTU 2.9 MÁME

- $\varphi(t) := \frac{t^2-1}{2t+1}$, PAK $\varphi'(t) = 2\,\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2} > 0$
- POTŘEBUJEME NAJÍT INTERVALY I_1, I_2 ŽE $\varphi(I_1) = (-\infty,0)$, $\varphi(I_2) = (0,\infty)$

 - $\varphi(\alpha) = 0 \iff \alpha = \varphi^{-1}(0) \left(= \psi(0)\right) = 0 + \sqrt{1} = 1$

 Tedy $\underline{\varphi(1) = 0}$; zřejmě $\varphi(+\infty) = +\infty$ => $\underline{\underline{\varphi((1,\infty)) = (0,\infty)}}$

 Dále $\lim_{t\to(-1/2)^+} \varphi(t) = \lim_{t\to(-1/2)^+} \frac{t^2-1}{2t+1} = -\frac{3}{4} \lim_{t\to(-1/2)^+} \frac{1}{2t+1}$

 $= \underline{-\infty}$ => $\underline{\underline{\varphi((-1/2,1)) = (-\infty,0)}}$.

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \\ t \in (-1/2,1) \\ \text{nebo } t \in (1,\infty) \end{array} \right| = \int \frac{1}{\varphi(t)\,(t-\varphi(t))} \cdot \varphi'(t)\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\frac{t^2-1}{2t+1}\left(t - \frac{t^2-1}{2t+1}\right)}\; 2\,\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}\,dt$$

$$= 2\int \frac{\cancel{t^2+t+1}}{(t^2-1)\,(\cancel{t^2+t+1})}\,dt = \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$\stackrel{c}{=} \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \underline{\underline{\log\left|\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}-1}{x+\sqrt{x^2+x+1}+1}\right|}}, \quad x \in (-\infty,0) \text{ NEBO } x \in (0,\infty)$$

$\boxed{4.}$ POKUD MÁ „ax^2+bx+c" 2 RŮZNÉ REÁLNÉ KOŘENY,

MŮŽEME POUŽÍT BUĎ EULEROVU SUBSTITUCI, NEBO METODU

Z PŘÍKLADU 2.

UKAŽME SI OBĚ METODY NA NÁSLEDUJÍCÍM PŘÍKLADU,

Z ČEHOŽ BUDOU VIDĚT JEJICH NE/VÝHODY:

PŘ 4

$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx =: \text{I}$$

... DEF. OBOR ZKOUMANÉ FCE JE $(-\infty,1)\cup(2,\infty)$

[PROTOŽE $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$]

$\boxed{\text{1. ZPŮSOB}}$: EULEROVA SUBSTITUCE

POUŽIJI SUBSTITUCI TIPU „$t = x+\sqrt{x^2-3x+2}$", TJ. (DLE PARTU 2.9)

$$\varphi(t) := \frac{t^2-2}{2t-3}$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = 2\,\frac{t^2-3t+2}{(2t-3)^2},$$ tedy φ roste na $(-\infty,1]$ a na $[2,\infty)$

klesá na $[1,3/2)$ a na $(3/2,2]$

$\varphi(-\infty)=-\infty$;

$\varphi(\infty)=\infty$;

$\varphi(1)=1$;

$\varphi(2)=2$

$$\Rightarrow \varphi((-\infty,1)) = (-\infty,1) \quad ; \quad \varphi((2,\infty)) = (2,\infty)$$

$$\Rightarrow \text{I} = \left|\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)\,dt \\ t\in(-\infty,1) \\ \text{nebo } t\in(2,\infty) \end{array}\right| = \int \frac{1}{(\varphi(t)-1)(t-\varphi(t))}\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

$$= \int \frac{1}{\frac{t^2-2-2t+3}{\cancel{2t-3}}\left(\frac{\cancel{2t^2-3t-t^2+2}}{\cancel{2t-3}}\right)}\cdot 2\cdot\frac{\cancel{t^2-3t+2}}{\cancel{(2t-3)^2}}\,dt$$

$$= 2\int \frac{1}{\underbrace{t^2-2t+1}_{=(t-1)^2}}\,dt \overset{c}{=} -2\,\frac{1}{t-1} = -\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x-1}$$

PRO $x\in(-\infty,1)$ a $x\in(2,\infty)$

$\boxed{\text{2. ZPŮSOB}}$ NA INTERVALECH $(-\infty, 1)$ a $(2, \infty)$ MÁME: 8. STRANA

$$\text{(I)} = \int \frac{1}{(x-1)\sqrt{\frac{(x-1)^2(x-2)}{x-1}}}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)\,|x-1|\,\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}\,dx$$

$$= \underbrace{\operatorname{sgn}(x-1)}_{=:\,A} \cdot \int \frac{1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}$$

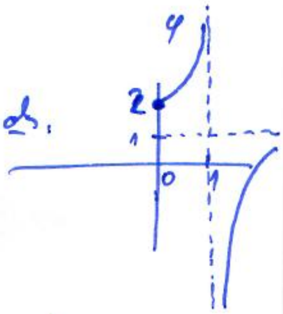
ZNAMÉNKO $x-1$ ZŮSTÁVÁ NA INTERVALECH $(-\infty,1)$ a $(2,\infty)$ KONSTANTNÍ

$$= \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) = \frac{2-t^2}{1-t^2} \\ dx = \varphi'(t)\,dt = \frac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt \\ t \in (0,1) \text{ NEBO } t \in (1,\infty) \end{array} \right| = A \cdot \int \frac{1}{\cancel{\left(\frac{1}{1-t^2}\right)^2} \cdot \cancel{t}} \, \frac{2\cancel{t}}{\cancel{(1-t^2)^2}}\,dt$$

$$t = \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} \Rightarrow t^2 = \frac{x-2}{x-1} \Rightarrow t^2(x-1) = x-2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2-t^2}{1-t^2} =: \varphi(t)$$

Pak $\varphi'(t) = \dfrac{-2t(1-t^2)+2t(2-t^2)}{(1-t^2)^2} = \dfrac{2t}{(1-t^2)^2}$ Ok.



$$\varphi((0,1)) = (2,\infty), \quad \varphi((1,\infty)) = (-\infty,1)$$

$$= A \cdot \int 2\,dt \overset{C}{=} 2At = \underline{\underline{2\operatorname{sgn}(x-1) \cdot \sqrt{\frac{x-2}{x-1}}}}$$

PRO $x \in (-\infty, 1)$

A PRO $x \in (2, \infty)$

POZN.: PRVNÍM ZPŮSOBEM VYŠLO $-2\,\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}+x-1}$

DRUHÝM — " — $2\operatorname{sgn}(x-1)\sqrt{\dfrac{x-2}{x-1}}$

$\Rightarrow$ TYTO VÝRAZY JSOU STEJNÉ AŽ NA KONSTANTU

(I KDYŽ NA PRVNÍ POHLED TAK NEVYPADAJÍ)