CVIČENÍ 2

1. Ve kterých bodech mají následující funkce derivaci podle komplexní proměnné?
a) $\overline{z}$ b) $|z|$ c) $|z|^2$ d) $|(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2| + 2i|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|$ e) $|z|^2 + i\operatorname{Re}(z^2)$
f) $|z|^2 + i\operatorname{Im}(z^2)$ g) $(\operatorname{Re} z)^2 + i(\operatorname{Im} z)^2$ h) $\operatorname{Re}(z^2) - i\operatorname{Im}(z^2)$

2. Nalezněte hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x+iy) := \frac{3}{2}x^2 - i\alpha xy + \beta y^2$ $(x, y \in \mathbb{R})$ byla diferencovatelná ve všech bodech $\mathbb{C}$.

3. Pro jaké hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x+iy) := x^2 + \alpha x + \alpha y + i(y^2 - 5\beta y + \beta x)$ $(x, y \in \mathbb{R})$ diferencovatelná v bodě $1 + 3i$?

4. Je dána funkce $f(x+iy) := x(x^2 - \alpha y^2) + iy(\beta x^2 - y^2)$ $(x, y \in \mathbb{R})$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Nalezněte všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby f byla diferencovatelná
a) na přímce o rovnici $\operatorname{Im} z = 0$ b) ve všech bodech $\mathbb{C}$.

5. Nalezněte všechny funkce diferencovatelné ve všech bodech $\mathbb{C}$, jejichž reálná část je rovna
a) $u(x+iy) = 2x - x^3 + 3xy^2$ b) $v(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2xy$ a $f(0) = 2i$.

VÝSLEDKY

1. a) v žádném bodě b) v žádném bodě c) v bodě 0 d) v bodě 0 a v bodech z, pro které platí $0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z < 0$, $0 < -\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$ nebo $\operatorname{Im} z < -\operatorname{Re} z < 0$ e) v bodech přímky $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$ f) v bodech reálné osy g) v bodech přímky $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ h) v bodě 0

2. $\alpha = -3$, $\beta = -\frac{3}{2}$

3. $\alpha = -1$, $\beta = 1$

4. a) $\beta = 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ b) $\beta = 3 = \alpha$

5. a) $f(z) = f(x+iy) = 2x - x^3 + 3xy^2 + i(2y - 3xy^2 + y^3 + C) = 2z - z^3 + iC$, kde $C \in \mathbb{R}$
b) $f(z) = f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2xy + i(4x^3y - 4xy^3 + y^2 - x^2 + 2) = z^4 - iz^2 + 2i$

CVIČENÍ 3

1. Najděte reálnou a imaginární část následujících hodnot funkcí.

a) $\sin(2+i)$ b) $\cos(2i)$ c) $\operatorname{tg}(2-i)$ d) $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4} - i\log 3)$ e) $\operatorname{tgh}(2+i)$ f) $\operatorname{cotgh}(\log 3 + i\frac{\pi}{4})$

2. Najděte všechna řešení následujících rovnic v $\mathbb{C}$.

a) $\sin z + \cos z = 10$ b) $\sin z - \cos z = i$ c) $\cosh z - \sinh z = 1$ d) $\cosh z - \sinh z = 2i$

VÝSLEDKY

1. Výsledky ve tvaru $\operatorname{Re} z$; $\operatorname{Im} z$: a) $\sin 2 \cdot \cosh 1;\ \cos 2 \cdot \sinh 1$ b) $\cosh 2;\ 0$ c) $\frac{\sin 2 \cdot \cos 2}{\cos^2 2 + \sinh^2 1};\ \frac{-\sinh 1 \cdot \cosh 1}{\cos^2 2 + \sinh^2 1}$ d) $\frac{9}{41};\ \frac{40}{41}$ e) $\frac{\sinh 2 \cdot \cosh 2}{\cos^2 1 + \sinh^2 2};\ \frac{\sin 1 \cdot \cos 1}{\cos^2 1 + \sinh^2 2}$ f) $\frac{40}{41};\ -\frac{9}{41}$

2. a) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\log(5\sqrt{2} \pm 7),\ k \in \mathbb{Z}$ b) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\log\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},\ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i\log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\ k \in \mathbb{Z}$ c) $2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$ d) $-\log 2 + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

CVIČENÍ 4

1. a) Spočtěte pro $z \in \{-1, 1+i, -i\}$ hodnoty $\log(z^2)$ a $2\log(z)$.
b) Ukažte, že pro $z = -1$, $b = 2$ a $a = 1/2$ dostaneme $m_a(m_b(z)) \neq m_{ab}(z)$.
c) Nalezněte číslo $z \in \mathbb{C}$ takové, že $\log(m_2(z)) \neq 2\log(z)$.
d) Nalezněte čísla $z, w, a \in \mathbb{C}$ taková, že $m_a(zw) \neq m_a(z) \cdot m_a(w)$.

2. Spočtěte křivkový integrál $\int_\varphi f$, kde:
a) $f(z) = \operatorname{Re} z$, φ je orientovaná úsečka $[0, 1+i]$
b) $f(z) = \operatorname{Im} z$, φ je kladně orientovaná půlkružnice daná podmínkami $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$
c) $f(z) = |z|$, φ je orientovaná úsečka $[0, 2-i]$
d) $f(z) = |z|$, φ je kladně orientovaná půlkružnice daná podmínkami $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
e) $f(z) = ze^z$, φ je kladně orientovaný čtverec s vrcholy 0, 1, $1+i$, i
f) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$, φ je kladně orientovaná hranice horního polomezikruží se středem v 0 a poloměry 1 a 2
g) $f(z) = (z-a)^n$ (kde $a \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{Z}$), φ je kladně orientovaná kružnice $|z-a| = R$, $R > 0$.

VÝSLEDKY

1. a) $\log((-1)^2) = 0 \neq 2\pi i = 2\log(-1)$, $\log((1+i)^2) = \log(2) + i\frac{\pi}{2} = 2\log(1+i)$, $\log((-i)^2) = \pi i \neq -\pi i = 2\log(-i)$
b) $m_{ab}(z) = i \neq \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = m_a(m_b(z))$
2. a) $\frac{1+i}{2}$ b) $-\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{5}(2-i)$ d) $2i$ e) 0 f) $\frac{4}{3}$ g) $2\pi i$ pokud je $n = -1$, jinak 0

CVIČENÍ 5

1. Spočtěte $\int_\varphi f$, pro funkce f zadané níže, kde φ je půlelipsa, která vede od $\frac{\pi}{2}$ přes $2\pi i$ do $-\frac{\pi}{2}$ a jejíž hlavní osy leží na souřadních osách.
a) $f(z) = (z+i)^2$ b) $f(z) = ze^{iz^2}$ c) $f(z) = z\cos z$ d) $f(z) = ze^z$
(*Hint: elipsa má tvar* $\varphi(t) = a\cos t + ib\sin t$)

2. a) Nalezněte primitivní funkci k $\frac{1}{z}$ na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ a s pomocí primitivní funkce spočtěte $\int_{\varphi_\varepsilon}\frac{1}{z}$ pro $\varepsilon\in(0,1)$ a $\varphi_\varepsilon(t) := e^{it}$, $t\in[-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon]$.
b) Spočtěte $\int_{\varphi_0}\frac{1}{z}$ a dokažte, že $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varphi_\varepsilon}\frac{1}{z} = \int_{\varphi_0}\frac{1}{z}$.
c) Dokažte, že $\frac{1}{z}$ nemá primitivní funkci na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

3. a) Nalezněte primitivní funkci k $\log z$ na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ a s pomocí primitivní funkce spočtěte $\int_{\varphi_\varepsilon}\log z$ pro $\varepsilon\in(0,1)$ a $\varphi_\varepsilon(t) := e^{it}$, $t\in[-\pi+\varepsilon,\pi-\varepsilon]$.
b) Spočtěte $\int_{\varphi_0}\log z$ a dokažte, že $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varphi_\varepsilon}\log z = \int_{\varphi_0}\log z$.
c) Dokažte, že $\log z$ nemá primitivní funkci na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

4. a) Spočtěte $\int_\varphi \frac{1}{m_{1/2}(z)}$, kde φ je polokružnice $|z|=1$ z bodu 1 do -1 přes horní polorovinu.
b) Spočtěte $\int_\varphi \frac{1}{m_{1/2}(z)}$, kde kladně orientovaná kružnice $|z|=1$ z bodu -1.
c) Dokažte, že $\frac{1}{m_{1/2}(z)}$ nemá primitivní funkci na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ a že má primitivní funkci na $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.

5. Dokažte, že neexistuje holomorfní funkce L na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ splňující $e^{L(z)} = z$ pro $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
(*Hint: Ukažte, že by muselo platit* $L'(z) = \frac{1}{z}$ *a použijte Příklad 2.*)

VÝSLEDKY

1. a) $\pi - \frac{\pi^3}{12}$ b) 0 c) 0 d) $2\sinh\frac{\pi}{2} - \pi\cosh(\frac{\pi}{2})$
2. a) $2i(\pi-\varepsilon)$ b) $2\pi i$
3. a) $-2i(\pi-\varepsilon)\cos\varepsilon + 2i\sin\varepsilon$ b) -2π
4. a) $2(i-1)$ b) $4i$

CVIČENÍ 6

1. Spočtěte přírůstek logaritmu funkce $(z-1)(z+2)$ podél kladně orientovaného obvodu čtverce s vrcholy $r(1+i)$, $r(-1+i)$, $r(-1-i)$ a $r(1-i)$ v závislosti na $r>0$.

2. Načrtněte $\langle\varphi\rangle$ a určete hodnotu indexu vzhledem k φ v jednotlivých komponentách $\mathbb{C}\setminus\langle\varphi\rangle$ pro následující křivky.

a)

$$\varphi = \psi \dotplus \left[\tfrac{10}{3}\pi - \tfrac{i}{2}, -\tfrac{i}{2}\right] \dotplus \theta \dotplus \left[4\pi - \tfrac{i}{2}, 4\pi + \tfrac{i}{2}\right] \dotplus \left[4\pi + \tfrac{i}{2}, \tfrac{i}{2}\right] \dotplus \left[\tfrac{i}{2}, i\right],$$

kde $\psi(t) = t + i\cos t$ pro $t \in [0, \frac{10}{3}\pi]$ a $\theta(t) = t - \frac{3}{2}i + i\cos t$ pro $t \in [0, 4\pi]$

b)

$$\varphi = \psi \dotplus [1, -3i] \dotplus [-3i, 2i] \dotplus \theta \dotplus [\tfrac{8}{3}\pi + \tfrac{i}{2}, -1 + \tfrac{i}{2}] \dotplus [-1 + \tfrac{i}{2}, -1 + i] \dotplus [-1 + i, 2\pi + i] \dotplus [2\pi + i, 2\pi - 3i] \dotplus [2\pi - 3i, -1],$$

kde $\psi(t) = t + i(t^2 - 1)$ pro $t \in [-1, 1]$ a $\theta(t) = t + i(1 + \cos t)$ pro $t \in [0, \frac{8}{3}\pi]$

c)

$$\varphi = \psi \dotplus \left[\tfrac{25}{6}\pi + \tfrac{i}{2}, -1 + \tfrac{i}{2}\right] \dotplus \left[-1 + \tfrac{i}{2}, -1\right] \dotplus [-1, 6\pi] \dotplus \theta,$$

kde $\psi(t) = t + i\sin t$ pro $t \in [0, \frac{25}{6}\pi]$ a $\theta(t) = 3\pi + 3\pi e^{-it}$ pro $t \in [0, \pi]$

VÝSLEDKY

1. 0 pro $r<1$, $2\pi i$ pro $r \in (1,2)$, $4\pi i$ pro $r>2$. Pro $r \in \{1,2\}$ není definováno.

2. Viz. výsledky zkouškových písemek z webu prof. Kalendy dostupné na odkazu `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`