Fakta, která je výhodné používat při řešení příkladů

Marek Cúth

17. prosince 2021

Studenti zde naleznou fakta, která mohou používat při řešení příkladů. Většina z uvedených tvrzení není těžké odvodit z látky probírané v prvním dvouletí studia Obecné matematiky na MFF, něco je analogické/odvoditelné z látky probírané v kurzu z Teorie míry 2.

1 Fakta plynoucí z teorie Fourierových řad

Věta 1. *Nechť $a > 0$ a X je jeden z Banachových prostorů $\{C([0,a]), L_p([0,a]);\ p \in [1,\infty)\}$. Položme*

(a)

$$D = \Big\{1, \sin(\tfrac{2\pi}{a}kx), \cos(\tfrac{2\pi}{a}kx);\ k \in \mathbb{N}\Big\}$$

pokud je X uvažovaný jako reálný prostor, a

(b)

$$D = \Big\{\exp(\tfrac{2\pi}{a}kix);\ k \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

pokud je X uvažovaný jako komplexní prostor.

Pak $\overline{\operatorname{span}} D = X$.

Věta 2. *Nechť $a > 0$. Pak*

(a) $\Big\{\sqrt{\frac{1}{a}}, \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{2\pi}{a}kx), \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(\frac{2\pi}{a}kx);\ k \in \mathbb{N}\Big\}$ *je ortonormální báze reálného prostoru $L_2([0,a])$; a*

(b) $\Big\{\sqrt{\frac{1}{a}}\exp(\frac{2\pi}{a}kix);\ k \in \mathbb{Z}\Big\}$ *je ortonormální báze komplexního prostoru $L_2([0,a])$.*

2 Fakta plynoucí z Teorie míry

V celé této sekci je $(\Omega, \mathcal{A})$ měřitelný prostor.

Zobrazení $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ je ($\mathbb{K}$-hodnotová) míra, pokud platí

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ kdykoliv $(A_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ je posloupnost disjunktních množin.

Pokud μ je $\mathbb{K}$-hodnotová míra, pak její *totální variace* je definovaná předpisem

$$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)|;\ E_1, \dots, E_n \in A \text{ jsou po dvou disjunktní podmnožiny } A\}$$

V této souvislosti je dobré znát informace obsažené v sekcích A2.1, A2.2, A2.4 ze souboru dostupného online zde:
`https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ufa15-a2.pdf`

Definice 3. *Nechť $(Y, \mathcal{B})$ je měřitelný prostor, μ je ($\mathbb{K}$-hodnotová) míra na $(\Omega, \mathcal{A})$ a f je měřitelné zobrazení z $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(Y, \mathcal{B})$. Potom množinová funkce*

$$f_{\#}\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{B}$$

se nazývá obraz míry.

Věta 4. *Nechť $(Y, \mathcal{B})$ je měřitelný prostor, μ je ($\mathbb{K}$-hodnotová) míra na $(\Omega, \mathcal{A})$ a f je měřitelné zobrazení z $(\Omega, \mathcal{A})$ do $(Y, \mathcal{B})$. Potom platí*

(a) Je–li μ ($\mathbb{K}$-hodnotová) míra na $(\Omega, \mathcal{A})$, pak $f_{\#}\mu$ je ($\mathbb{K}$-hodnotová) míra na $(Y, \mathcal{B})$.

(b) Je–li $g : Y \to \mathbb{K}$ měřitelná funkce, pak $g \in L_1(f_{\#}|\mu|)$ právě když $g \circ f \in L_1(|\mu|)$ a v tomto případě platí
$$\int_Y g \,\mathrm{d}f_{\#}\mu = \int_\Omega g \circ f \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 5. *Nechť $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je σ-konečná míra a $f \in L_1(\mu)$. Pak funkce $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ definovaná předpisem*
$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu, \quad A \in \mathcal{A}$$

je $\mathbb{K}$-hodnotová míra, kterou značíme symbolem $\nu = f \,\mathrm{d}\mu$. Říkáme, že f je hustotou míry ν vzhledem k μ, *nebo že ν* je míra s hustotou f vzhledem k μ. *Pak platí*

- $|f \,\mathrm{d}\mu| = |f| d\mu$, *a*
- *je–li $g : \Omega \to \mathbb{K}$ měřitelná funkce, pak $g \in L_1(|f| \,\mathrm{d}\mu)$ právě když $gf \in L_1(\mu)$ a v tomto případě platí*
$$\int g \,\mathrm{d}(f \,\mathrm{d}\mu) = \int gf \,\mathrm{d}\mu.$$

Pokud je K kompaktní metrický prostor, pak symbolem $M_+(K)$ značíme všechny (nezáporné) konečné míry definované na sigma algebře borelovských množin v K. Symbolem $M(K)$ značíme všechny $\mathbb{K}$-hodnotové míry, pro které platí $|\mu| \in M_+(K)$.

3 Fakta týkající se derivování a diferenciálních rovnic

Věta 6. *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval, $f \in C(J)$ a nechť $c \in J$. Definujeme funkci F na J pro $x \in J$ předpisem*

$$F(x) = \begin{cases} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t, & x \geq c \\ -\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t, & x \leq c. \end{cases}$$

Pak $F \in C(J)$ a pro každý vnitřní bod x intervalu J platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 7. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ a r jsou funkce spojité na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $t_0 \in (a, b)$ a $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno řešení y rovnice*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = r(x), \qquad x \in (a, b),$$

které splňuje podmínky $y(t_0) = z_0, y'(t_0) = z_1, \ldots y^{n-1}(t_0) = z_{n-1}$.

Věta 8. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a funkce $g : I \to \mathbb{R}$ má na vnitřku intervalu I vlastní derivaci a splňuje že $K = \sup_{x \in I} |g'(x)| < \infty$. Pak g je K-Lipschitzovská.*

Důkaz. Zvolme $x, y \in I$, $x < y$, pak dle Věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (x, y)$ splňující $g'(\xi) = \frac{g(y)-g(x)}{y-x}$, tedy dostáváme

$$|g(y) - g(x)| = |g'(\xi)| \cdot |y - x| \leq K|y - x|,$$

a protože $x, y \in I$ byly libovolné, dostáváme že g je K-lipschitzovská. $\square$