Otázky Vítek

1. Hledejme kořen polynomu $x^3 - 9 = 0$ na intervalu $[0, 2]$ pomocí *metody půlení intervalu*. Napište algoritmus této metody. Jaký řád má metoda půlení intervalu? Odhadněte kolik iteračních kroků je přibližně potřeba k dosažení chybové tolerance 10^{-6}? (nápověda $2^{20} \approx 1\,000\,000$)

2. Popište Newtonovu metodu pro řešení nelineární algebraické rovnice $f(x) = 0$. Formulujte větu o konvergenci této metody (bez důkazu), okomentujte předpoklady a tvrzení této věty. Dále předpokládejme, že po 5 krocích je chyba 10^{-4}. Kolik dalších kroků musíme minimálně provést, pokud chceme dosáhnout chyby 10^{-16}?

3. Formulujte Newtonovu metodu pro řešení soustavy nelineárních algebraických rovnic $f(x) = 0$, kde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ n \geq 1$. Vysvětlete, co to je *asymptotický řád konvergence* metody a uveďte, jaký asymptotický řád konvergence má Newtonova metoda? Vysvětlete proč je obecně výhodnější řešit příslušné soustavy lineárních algebraických rovnic iteračně (v porovnání s přímými metodami).

4. Odvoďte Lagrangeovu interpolaci funkce a uveďte vhodný způsob, jak spočítat Lagrangeův interpolační polynom. Rozhodněte o existenci a jednoznačnosti interpolace. Formulujte větu o odhadu chyby interpolace včetně předpokladů tvrzení. Uveďte nevýhody Lagrangeovy interpolace.

5. Vysvětlete, co to je *kubický spline*. Formulujte větu o iterpolační chybě kubického splinu (nezapomeňte na předpoklady hladkosti interpolované funkce). Rozlište dva případy okrajových podmínek:
   (i) $\varphi''(a) = f''(a)$, $\varphi''(b) = f''(b)$,
   (ii) $\varphi''(a) = 0$, $\varphi''(b) = 0$ (přirozený kubický spline).
   Uveďte, jaké má výhody v porovnání s Lagrangeovým interpolačním polynomem.

6. Definujte kubický spline a naznačte jeho konstrukci pro ekvidistantní dělení. Uveďte argument týkající se existence kubického splinu.

7. Vysvětlete, co to jsou *Newton-Cotesovy kvadraturní vzorce* pro numerický výpočet integrálu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Uveďte jakým způsobem se odvozují a napište dva konrétní příklady. Co to je algebraický řád kvadraturní formule? Jaký algebraický řád mají Newton-Cotesovy kvadraturní vzorce?

8. Vysvětlete, co to jsou *Gaussovy kvadraturní vzorce* pro numerický výpočet integrálu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Uveďte jakým způsobem se odvozují a napište alespoň jeden konkrétní příklad. Co to je algebraický řád kvadraturní formule? Jaký algebraický řád mají Gaussovy kvadraturní vzorce?

9. Vysvětlete, co to jsou složená kvadraturní pravidla, a uveďte jejich výhody. Máme-li kvadraturní pravidlo přesné pro polynomy stupně 5, jakým způsobem zavisí chyba odpovídajícího složeného kvadraturní pravidla vzhledem ke kroku dělení h?

10. Vysvětete princip metody polovičního kroku pro odhad chyby numerické integrace. Dále uvažujme následující situaci. Počítáme integrál $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Použitím složené dvoubodové Gausovy kvadraturní formule s krokem $h = 0.1$ jsme dostali hodnotu $Q_h = 2.220$ a s polovičním krokem hodnotu $Q_{h/2} = 2.234$. Jaká je přibližná chyba výpočtu s polovičním krokem?

11. Odvoďte explicitní Eulerovu metodu pro řešení obyčejné diferenciální rovnice. Stručně popište pojmy lokální diskretizační chyba, řád metody, konzistence, (globální) celková diskretiační chyba, konvergence a diskutujte je pro explicitní Eulerovu metodu.

12. Formulujte větu o odhadu <u>celkové diskretizační chyby</u> obecné jednokrokové metody, za předpokladu, že přírůstková funkce $\psi(t, y, h)$ je Lipschitzovská vzhledem k y a <u>lokální diskretizační chyba</u> splňuje $|\tau(t, h)| \leq Ch^4$. Podtržené pojmy vysvětlete. Jak vypadá formulka pro odhad chyby metodou polovičního kroku této metody?

13. Uvažujme ODR
$$y'(t) = -200y(t) + 100t + 50,$$
kterou řešíme pomocí explicitní Eulerovy metody. Určete maximální velikost kroku metody, pro který bude tato metoda stabilní tzv. A-stabilita nebo-li absolutní stabilita. (Nápověda: odvoďte napřed podmínku stability pro Eulerovu metodu a tu pak aplikujte na konkrétní rovnici.) Dále uveďte, jakým způsobem závisí *globální diskretizační chyba* a *globální algebraická chyba* na kroku h.

14. Popište základní myšlenku odvození Runge–Kuttových metod pro řešení obyčejné diferenciální rovnice $y'(t) = f(t, y(t))$. Jaký je vztah mezi p a s, kde p je řád metody a s je počet vyčíslení funkce f ("stage")?

15. Uvažujme vícekrokovou metodu pro řešení obyčejné diferenciální rovnice $y'(t) = f(t, y(t))$. Vysvětlete pojmy: *řád metody*, *stabilita metody* a jejich *vztah ke konvergenci metody*. Rozhodněte, zda-li metoda
$$\frac{1}{2}y_k - 2y_{k-1} + \frac{3}{2}y_{k-2} = -hf_{k-2}$$
je 0-stabilní a určete její řád?

16. Formulujte úlohu minimalizace funckcionálnu. Vysvětlete princip metody nejvyššího spádu. Proč se volí směr minimalizace jako minus gradient funcionálu?