cvičení z Náhodných procesů 1 (NMSA334)

5. nerozložitelné homogenní markovské řetězce se stavy v $S = \mathbb{N}_0$

Uvažujme nerozložitelný homogenní Markovův řetězec $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ se stavy v $S = \mathbb{N}_0$ s maticí přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p & \mathbf{q}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde $p \in \mathbb{R}, \mathbf{q}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Pak stavy řetězce X jsou *trvalé* právě tehdy, když

$$\boxed{\forall x \in [0,1]^{\mathbb{N}} \quad x = \mathbf{R}\, x \quad \Rightarrow \quad x = 0_{\mathbb{N}}}.$$

Označme $\boldsymbol{u_i} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_i(\tau_0(1) < \infty)$ a $\boldsymbol{u} \stackrel{\text{def}}{=} (u_i)_{i=1}^{\infty} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ vektor podmíněných pravděpodobností, že řetězec někdy navštíví stav 0. Tento vektor splňuje analogickou rovnici jako matice absorpcí a to ve tvaru

$$\boxed{u = \mathbf{Q} + \mathbf{R}\, u}. \tag{2}$$

Tato rovnice má vždy jednoduché řešení a to $u = 1_{\mathbb{N}}$, neboť $\mathbf{Q} + \mathbf{R}1_{\mathbb{N}} = (\mathbf{Q}\ \mathbf{R})1_{\mathbb{N}_0} = 1_{\mathbb{N}}$. Má-li rovnice (2) také jiné řešení v $[0,1]^{\mathbb{N}}$, pak je toto řešení tvaru $u = 1_{\mathbb{N}} - x$, kde $x \in [0,1]^{\mathbb{N}} \backslash \{0\}^{\mathbb{N}}$ řeší rovnici $x = \mathbf{R}\, x$. Pokud žádné jiné řešení v $[0,1]^{\mathbb{N}}$ než $u = 1_{\mathbb{N}}$ neexistuje, pak z definice vektoru u řešící rovnici (2) plyne, že se řetězec do stavu i vždy vrátí skoro jistě a všechny stavy řetězce tak musejí být trvalé.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{stavy nerozložitelného} \\ \text{HMŘ } (S = \mathbb{N}_0) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{trvalé} \left\{ \begin{array}{l} \text{nenulové} \ \equiv \exists\, \pi \in [0,1]^S \quad \pi^{\mathsf{T}} = \pi^{\mathsf{T}}\mathbf{P},\ \pi^{\mathsf{T}}1_S = 1 \\ \text{nulové} \end{array} \right. \\ \text{přechodné} \ \equiv \exists\, x \in [0,1]^{\mathbb{N}} \backslash \{0\}^{\mathbb{N}} \quad x = \mathbf{R}\, x \end{array} \right.}$$

Stacionární rozdělení v nerozložitelném homogenním markovském řetězci existuje právě tehdy, když jsou všechny jeho stavy trvalé nenulové a v tom případě jsou odpovídající pravděpodobnosti π_i skoro jistě limitními relativními četnostmi návštěv řetězce, tj.

$$\boxed{\pi_i \stackrel{\text{sj}}{=} \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} 1_{[X_k = i]} \stackrel{\text{sj}}{=} \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_i(X_k = i) = \frac{1}{\mathbb{E}_i \tau_i(1)}}.$$

Je-li navíc řetězec aperiodický, pak existují limity $\lim_n \mathbb{P}_i(X_n = i) = \pi_i, i \in \mathbb{N}_0$.

Příklady

1. Uvažujme posloupnost bernoulliovských pokusů. Pravděpodobnost zdaru je $p \in (0,1)$ a pravděpodobnost nezdaru $q = 1 - p$. Definujme X_n jako délku série zdarů, které jsme dosáhli v n-tém pokuse (pokud skončil n-tý pokus nezdarem, je $X_n = 0$). Ukažte, že posloupnost $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ je homogenní Markovův řetězec, najděte matici pravděpodobností přechodu (i vyšších řádů), klasifikujte stavy řetězce a spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje).

2. Mějme Markovův řetězec s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

   kde $(p_i)_{i=0}^{\infty} \in (0,1)^{\mathbb{N}_0}$. Určete stacionární rozdělení (pokud existuje) a klasifikujte stavy řetězce.

3. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

   Nalezněte stacionární rozdělení tohoto řetězce (pokud existuje).

4. Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde $(p_i)_{i=0}^{\infty} \in (0,1)^{\mathbb{N}_0}$. Nalezněte stacionární rozdělení tohoto řetězce (pokud existuje).

5. Mějme markovský řetězec s množinou stavů $\mathbb{N}_0$ a s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Klasifikujte stavy řetězce a najděte stacionární rozdělení (pokud existuje).

6. Mějme markovský řetězec s množinou stavů $\mathbb{N}_0$ a s maticí pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \dots \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{16} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Klasifikujte stavy řetězce a najděte stacionární rozdělení (pokud existuje).

7. Prohnaný Sisyfos má za trest vykulit těžký balvan na nekonečně vysoký kopec. Nezávisle na předchozí historii a také na výšce, ve které se balvan v čase n nachází, jej Sisyfos v souladu se svým úkolem vykulí o 1 metr výše s pravděpodobností $1/4$, s pravděpodobností $1/2$ si odpočine tak, že kámen zůstane ve stejné výšce, a s pravděpodobností $1/4$, roztrpčen nad marností své snahy, nechá balvan skutálet zpět na základní úroveň.

   Označme X_n výšku balvanu v čase $n \in \mathbb{N}$ nad základní úrovní (v metrech). Uvědomte si, že $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ je homogenní Markovův řetězec. Sestavte matici pravděpodobností přechodu. Klasifikujte stavy řetězce a najděte stacionární rozdělení, pokud existuje. Rozhodněte, zda Sisyfos v nekonečném horizontu uložený úkol splní (tedy zda $X_n \xrightarrow{\text{sj}} \infty$ pro $n \to \infty$).

8. Leze slimák po nekonečně vysokém stromě. Za každou hodinu vyleze nahoru o jeden centimetr s pravděpodobností $p = 1/4$ a se zbylou pravděpodobností $q = 1 - p = 3/4$ sklouzne dolů o jeden centimetr, je-li nad základní úrovní. V opačném případě místo sklouznutí zůstává na svém místě. Označme X_n výšku (v centimetrech), ve které se slimák nachází po n hodinách. Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $(X_n)_{n=0}^{\infty}$. Klasifikujte stavy řetězce a spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje). Předpokládejte, že na počátku (v čase $n = 0$) je slimák na zemi a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po třech hodinách.[1]

9. Aneta a Barbora hrají sérii šachových zápasů. Předpokládejme, že každá partie skončí výhrou Anety s pravděpodobností $1/3$, Barbory s pravděpodobností $1/3$ a remízou a s pravděpodobností $1/3$. Za výhru se získává jeden bod, za remízu půl bodu. Označme X_n absolutní hodnotu rozdílu získaných bodů obou hráček po n partiích. Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $(X_n)_{n=0}^{\infty}$. Klasifikujte stavy řetězce a určete stacionární rozdělení (pokud existuje).

[1] Pokud $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ řeší soustavu $\boxed{x_{k+2} - (\lambda_1 + \lambda_2)x_{k+1} + \lambda_1\lambda_2 x_k = 0, k \in \mathbb{N}}$, kde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, pak existují $a, b \in \mathbb{C}$ takové, že

$$\boxed{x_k = a\lambda_1^k + b\lambda_2^k}, \quad \text{pokud} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \qquad \boxed{x_k = (a + bk)\lambda^k}, \quad \text{pokud } \lambda = \lambda_1 = \lambda_2, \quad k \in \mathbb{N}_0$$