

(1) Rozhodněte o následujících funkcích, zda jsou nebo nejsou charakteristickými funkcemi nějakých náhodných veličin a své tvrzení stručně zdůvodněte:

$$(a) f_1(t) = \frac{\cos t}{(1-it)^2} e^{it-|t|-t^2} \frac{\sin^2 t}{t^2}$$

$$(b) f_2(t) = \frac{1}{3-\cos t} + \frac{1}{3-e^{it}} \max\{e^{-t^2}, e^{-|t|}\}$$

$$(c) f_3(t) = \frac{1}{2-(1+i)t} + \frac{1}{2} \frac{e^{it}}{1+t^2}$$

$$(d) f_4(t) = \frac{1}{7-\cos t} \exp\{e^{-|t|} - 1\} + \frac{1}{4-e^{-t^2}} \exp\left\{\frac{\sin t}{t} - 1\right\} + \frac{1}{3-e^{-|t|}} \exp\{e^{-t^2} - 1\}$$

$$(e) f_5(t) = \frac{e^{it^3} + e^{-it^3}}{2} e^{it}.$$

(2) Buďte  $X_n$  nezávislé n.v. s centrovaným normálním rozdělením  $N(0, n^2)$  s rozptylem  $n^2$ .

(a) Rozhodněte, zda je následující řada konvergentní skoro jistě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^2 - n^2}{n^3}.$$

(b) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje skoro jistě. Pokud ano, spočtěte příslušnou limitu

$$Y_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n X_k^2.$$

(c) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje v distribuci. Pokud ano, spočtěte příslušné limitní rozdělení

$$Z_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^n \frac{X_k^2 - EX_k^2}{k}.$$

(3) Reálné n.v.  $X, Y$  jsou nezávislé a mají rovnoměrné rozdělení  $R(0, 1)$  na intervalu  $(0, 1)$ . Spočtěte

$$(a) E[(1+X)^{-2}|X-Y]$$

$$(b) E[(1+X+Y)^{-2}|Y].$$