

(1) Rozhodněte o následujících funkcích, zda jsou nebo nejsou charakteristickými funkcemi nějakých náhodných veličin a své tvrzení stručně zdůvodněte:

(a) $f_1(t) = \cos^3(t) + i \sin(t^3)$

(b) $f_2(t) = \cos(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \max\{\cos(t), e^{-|t|}\} \right]$

(c) $f_3(t) = \frac{\sin(2t)}{2t} + \frac{e^{3it}}{3 - \cos(3t)} \exp\{e^{-t^2} + e^{-|t|} - 2\}$

(d) $f_4(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos[\sin(\sqrt[3]{t})]$

(e) $f_5(t) = \frac{1}{6} \exp\{e^{it} - 1\} + \frac{e^{-t^2}}{4 - \cos(t)} + \frac{e^{it}}{2 - 2it} \cdot \frac{\cos^2(t)}{1 + t^2}$.

(2) Buďte X_n nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $n^{3/4}$.

(a) Rozhodněte, zda je následující řada konvergentní skoro jistě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^2 - n}{n^3}.$$

(b) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje skoro jistě. Pokud ano, spočtěte příslušnou limitu

$$Y_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n X_k^2 k^{3/2}.$$

(c) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje v distribuci. Pokud ano, spočtěte příslušné limitní rozdělení

$$Z_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (X_k^2 - EX_k^2).$$

(3) Reálné náhodné veličiny X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x, y) = 6(x - y)^2 \cdot 1_{(0,1)^2}(x, y)$. Spočtěte

(a) $E[(X + Y)^2 | X - Y]$

(b) $E[X + Y | X - Y]$.