

(1) Rozhodněte o následujících funkcích, zda jsou nebo nejsou charakteristickými funkcemi nějakých náhodných veličin a své tvrzení stručně zdůvodněte:

(a)  $f_1(t) = e^{it} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\sqrt[3]{t}) \right]$

(b)  $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}}{1+t^2} \frac{e^{it}}{2-\cos(t)} \frac{\sin^2(t)}{t^2}$

(c)  $f_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \max\{\cos(t), \sin(t)\} e^{it}$

(d)  $f_4(t) = [\cos^2(t) + i \sin^4(t)] e^{it-t^2}$

(e)  $f_5(t) = \frac{\cos^2(t)}{3-e^{-|t|}} + \frac{e^{-t^2/2}}{5-e^{it}} + \frac{e^{\cos(t)}-1}{5-\cos(t)}$ .

(2) Buďte  $X_n$  nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou  $n^{2/3}$ .

(a) Rozhodněte, zda je následující řada konvergentní skoro jistě

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^3 - 1}{n^4}.$$

(b) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje skoro jistě. Pokud ano, spočtěte příslušnou limitu

$$Y_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{X_k^3}{k}.$$

(c) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje v distribuci. Pokud ano, spočtěte příslušné limitní rozdělení

$$Z_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} (X_k^3 - EX_k^3).$$

(3) Reálné náhodné veličiny  $X, Y$  jsou nezávislé a obě mají standardní normální rozdělení  $N(0, 1)$ . Spočtěte

(a)  $E[Y^2|X/Y]$

(b)  $E[X^2|X/Y]$ .