

1. Rozhodněte, která z následujících funkcí je charakteristickou funkcí nějaké reálné náhodné veličiny a své rozhodnutí stručně zdůvodněte.

(a)  $f_1(t) = \cos(\sin(t^2)) e^{it}$

(b)  $f_2(t) = \exp\{-\sin^2 t\} e^{it}$

(c)  $f_3(t) = \frac{\sin t}{2t} + \frac{1}{3-e^{-|t|+it-t^2}}$

(d)  $f_4(t) = \frac{1}{3-\cos^2(t)} e^{\cos^2(t)-|t|-1} + \frac{1}{2}$

(e)  $f_5(t) = \max\{e^{-|t|}, \cos(t)\} e^{-t^2}$ .

2. Necht'  $X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou  $n^2$ .

(a) Rozhodněte o sčítatelnosti skoro jistě následující řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^2 - 2k^3(k+1)}{k^5}.$$

(b) Rozhodněte o konvergenci skoro jistě následující posloupnosti a určete její limitu

$$Y_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n \frac{X_k^2}{k^2}.$$

3. Necht'  $X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením  $R(-n, n)$ . Rozhodněte o konvergenci v distribuci následující posloupnosti a najděte případné limitní rozdělení

$$Z_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{X_k^3 - EX_k^3}{k^{3/2}}.$$