

Spojité reálné veličiny

Reálná náhodná veličina $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ je spojitá, pokud existuje nezáporná funkce $f \geq 0$ zvaná hustota taková, že

$$P(X \in B) = \int_B f(x) dx, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).^1$$

Míra $P_X : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto P(X \in B)$ se nazývá rozdělení náhodné veličiny X a je jednoznačně určena distribuční funkcí, která se v případě spojitě náhodné veličiny s hustotou f dá zapsat ve tvaru

$$F_X(x) := P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy.$$

Reálná náhodná veličina X je spojitá (tj. má hustotu) právě tehdy, když její distribuční funkce $F_X(x) = P(X < x)$ je neurčitým integrálem nějaké funkce.

Nutné a postačující podmínky pro funkci F , aby byla distribuční funkcí nějaké reálné náhodné veličiny, a pro funkci f , aby byla hustotou, jsou

$$\begin{array}{ll} F(x) \text{ je neklesající (+ zleva spojitá),} & f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ F(+\infty_-) = 1 \quad \text{a také } F(-\infty_+) = 0 & \int f(x) dx = 1. \end{array}$$

-
- (1) Rozhodněte, které z následujících funkcí jsou hustotami nějaké reálné náhodné veličiny
- (a) $f_1(x) = c \sin(x) \cdot 1_{(0, \pi/2)}(x)$
 - (b) $f_2(x) = c \sin(x) \cdot 1_{(0, 2\pi)}(x)$
 - (c) $f_3(x) = cx^2 e^{-x^3} \cdot 1_{(0, \infty)}(x)$
 - (d) $f_4(x) = cx^3 \exp\{-x^4\}$
 - (e) $f_5(x) = ce^{-|x|}$
 - (f) $f_6(x) = c|x^3| \exp\{x^4\}$
 - (g) $f_7(x) = ce^x$
 - (h) $f_8(x) = ce^{-x} \cdot 1_{[0, \infty)}(x)$
 - (i) $f_9(x) = c(1+x)^{-1} \cdot 1_{(-\infty, 0)}(x)$
 - (j) $f_{10}(x) = c(1+x^2)^{-1}$.
- (2) Pro náhodnou veličinu s hustotou $f(x) = 3x^2 I\{0 \leq x \leq 1\}$ najděte distribuční funkci, kvantilovou funkci a pravděpodobnost $P[1/3 < X < 2/3]$.
- (3) Pro náhodnou veličinu X s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(-1, 1)$ určete pravděpodobnosti
- (a) $P(X^2 > 1/2)$,
 - (b) $P(X^2 > 1/2 | X > 0)$.
- (4) Pro náhodnou veličinu X s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(1, 2)$ určete pravděpodobnosti $P(1/X < 2/3)$, $P(1/X^2 < 2/3)$.
- (5) Určete rozdělení objemu krychle, jejíž hrana má náhodnou délku s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 10)$.
- (6) Nechť n.v. X má distribuční funkci $F(x)$ splňující $F(x) = \sin x$ pro $0 < x < \pi/2$. Určete rozdělení n.v. $Y = \sin X$.

¹ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ označuje borelovskou σ -algebru na \mathbb{R} , tj. nejmenší σ -algebru na \mathbb{R} obsahující množiny typu $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$.