

Sada příkladů na volné extrémy

Co budeme potřebovat z teorie

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém). *Pokud má f v bodě a lokální extrém a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, potom $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

Definice (Hessova matice). *Hessovu matici funkce f v bodě a definujeme jako*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(a) \end{pmatrix}$$

Věta (postačující podmínka pro lokální extrém). *Nechť $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f \in C^2(G)$, $a \in G$. Nechť navíc $\nabla f(a) = 0$, potom:*

- *je-li $H_f(a)$ pozitivně definitní, potom má f v a lokální minimum,*
- *je-li $H_f(a)$ negativně definitní, potom má f v a lokální maximum,*
- *je-li $H_f(a)$ indefinitní, potom f v a nemá lokální extrém.*

Příklady

1. Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce $f(x, y, z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
3. Vyšetřete lokální a globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2y - ye^z + 2x + z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
4. Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
5. Vyšetřete lokální i globální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = -3x^2z - x^3 + 2x^2 - 2xy - 3xz^2 + 29x + 5y^2 + 8y - z^3 + 27z + 5,$$
$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$