

## Co budeme potřebovat z teorie

**Věta** (nutná podmínka konvergence řady). *Pokud nekonečná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje, potom  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .*

**Definice** (absolutní konvergence). *Říkáme, že nekonečná řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje absolutně, pokud platí  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ .*

**Věta** (konvergence a absolutní konvergence). *Nechť řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konverguje absolutně, potom konverguje.*

**Věta** (Abel-Dirichletovo kritérium). *Nechť  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  jsou posloupnosti s reálnými členy,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  monotonní.*  
*Pokud platí alespoň jedna z následujících podmínek:*

- (Abel)  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  omezená a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konverguje,
- (Dirichlet)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  má omezené částečné součty.

*Potom řada  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  konverguje.*

Důležité tvrzení:  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$  má omezené částečné součty pro  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$  má omezené částečné součty pro  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{N}\}$ .

## Příklady

1. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n^2}$ .
2. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n}$ .
3. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  v závislosti na parametru  $z \in \mathbb{R}$ .
4. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} n^7 z^n$  v závislosti na parametru  $z \in \mathbb{R}$ .
5. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2} z^n$  v závislosti na parametru  $z \in \mathbb{R}$ .
6. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) (\sqrt{n^3 + 3} - \sqrt{n^3 + 1}).$$

7. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) \frac{\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}.$$

8. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[213]{n}}$
9. Vyšetřete konvergenci řady  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{n}) \cos(n) \sqrt{\frac{n+2}{n(n+1)}}$ .
10. Vyšetřete konvergenci řady  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n + \frac{1}{n})}{\log(\log(n))}$