

Sada příkladů na 12. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Věta (nutná podmínka pro lokální extrém). *Pokud má f v bodě a lokální extrém a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, potom $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

Věta (o Lagrangeových multiplikátorech). *Nechť $m, d \in \mathbb{N}$, $m < d$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $f, g_1, \dots, g_m : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(G)$. Položme*

$$M = \{x \in G : g_1(x) = \dots = g_m(x) = 0\}.$$

Nechť f má v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M , potom platí alespoň jedna z následujících podmínek:

1. *vektory $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_m(a)$ jsou lineárně závislé,*
2. *existují $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ taková, že $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(a)$.*

Příklady

1. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.
2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
3. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
4. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3$ vzhledem k množině $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$.
5. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$.
6. Vyšetřete globální extrémy funkce $x^2 + y^2 + z + 2xz$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$.
7. Nalezněte nejbližší bod k bodu $(0, 0, 0)$ vzhledem k množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 3z + 3 = x\}$.
8. Nalezněte nejvzdálenější bod od roviny procházející počátkem a kolmé na vektor $(1, 2, 3)$, ležící v množině $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2, x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.