

Sada příkladů na 8. týden

Co budeme potřebovat z teorie - lineární rovnice 1. řádu

Lineární rovnice 1. řádu - metoda integračního faktoru

Jde o rovnici

$$y' + a(x)y = b(x).$$

Nechť

- $A(x)$ je primitivní funkce k $a(x)$ na intervalu I
- $B(x)$ je primitivní funkce k funkci $b(x)e^{A(x)}$ (na I),

potom $(ye^{A(x)})' = e^{A(x)}y' + a(x)ye^{A(x)} = b(x)e^{A(x)}$ a tedy $ye^{A(x)} = B(x) + C$, kde C je nějaká reálná konstanta. Všechna řešení rovnice (na I) pak mají tvar

$$y = B(x)e^{-A(x)} + Ce^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Převod na lineární rovnice 1. řádu - Bernoulliho rovnice

Jde o rovnici

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha.$$

Po úpravě

$$(1 - \alpha)y'y^{-\alpha} + (1 - \alpha)p(x)y^{1-\alpha} = (1 - \alpha)q(x)$$

a substituci

$$z = y^{1-\alpha}, \quad a(x) = (1 - \alpha)p(x) \quad \text{a} \quad b(x) = (1 - \alpha)q(x)$$

dostaneme rovnici $z' + a(x)z = b(x)$.

Definice (Wronského determinant). Pro $u_1, \dots, u_n \in C^{n-1}((a, b))$ a $x \in (a, b)$ definujeme Wronského determinant (Wronskián) jako

$$W(x) = W_{u_1, \dots, u_n}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Věta (vlastnosti Wronskiánu). Nechť $u_1, \dots, u_n \in C^n((a, b))$ jsou řešení dané lineární rovnice, potom $W'(x) = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}W(x)$, $x \in (a, b)$.

Příklady

1. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' - 2xy = 2x^3y^2$.
2. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = y + y^2$.
3. Nalezněte obecné řešení rovnice $xy' + y = y^2$.
4. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' + 4\frac{y}{x} = 2x\sqrt{y}$.
5. Nalezněte obecné řešení rovnice $x^2y''' = 2y'$.
6. Nalezněte obecné řešení rovnice $x^2y''xy' + 4y = 10x$.
7. Nalezněte obecné řešení rovnice $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$, víte-li, že jedno řešení má tvar e^{ax} .
8. Nalezněte obecné řešení rovnice $xy'' + 2y' - xy = 0$, víte-li, že jedno řešení má tvar $\frac{e^x}{x}$.
9. Nalezněte obecné řešení rovnice $2yy' = y^2 + (y')^2$.
10. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' = \frac{1}{y^3}$.