

Co budeme potřebovat z teorie

Věta (o implicitním zobrazení). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^{d+m}$ je otevřená, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F \in C^k(G)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in G \subset \mathbb{R}^{d+m}$. Předpokládejme, že $F(a, b) = 0$ a že platí*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}(a, b) & \frac{\partial F_1}{\partial u_2}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m}(a, b) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1}(a, b) & \frac{\partial F_2}{\partial u_2}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m}(a, b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1}(a, b) & \frac{\partial F_m}{\partial u_2}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m}(a, b) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Potom existují $\delta, \Delta > 0$ taková, že

- *pro každé $x \in U(a, \delta)$ existuje právě jedno $u \in U(b, \Delta)$ takové, že $F(x, u) = 0$,*
- *je-li φ zobrazení přiřazující bodu x bod u jako výše, je toto zobrazení $C^k(U(a, \delta))$.*

Zjednodušená verze pro $d = m = 1$:

Věta (o implicitní funkci). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, $F : G \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^k(G)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in G \subset \mathbb{R}^2$. Předpokládejme, že*

- $F(a, b) = 0$,
- $\frac{\partial F}{\partial u}(a, b) \neq 0$.

Potom existují $\delta, \Delta > 0$ a C^k funkce $\varphi : (a - \delta, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(a) = b$, že

- $F(x, \varphi(x)) = 0$
- $\{(x, u) \in G : F(x, u) = 0\} \cap [(a - \delta, a + \delta) \times (b - \Delta, b + \Delta)] = \text{graf } \varphi$

Zjednodušená verze pro $d = 2$ a $m = 1$:

Věta (o implicitní funkci). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená, $F : G \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^k(G)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, $(a_1, a_2, b) = (a, b) \in G \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Předpokládejme, že*

- $F(a, b) = 0$,
- $\frac{\partial F}{\partial u}(a, b) \neq 0$.

Potom existují $\delta, \Delta > 0$ a C^k funkce $\varphi : U(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(a) = b$, že

- $F(x, y, \varphi(x, y)) = 0$
- $\{(x, y, u) \in G : F(x, y, u) = 0\} \cap [U(a, \delta) \times (b - \Delta, b + \Delta)] = \text{graf } \varphi$

Inverzní zobrazení ($d = m$): Mějme soustavu

$$\begin{aligned} f_1(u_1, \dots, u_d) &= x_1 \\ &\vdots \\ f_d(u_1, \dots, u_d) &= x_d \end{aligned}$$

Pro $f_i \in C^k(G)$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $i = 1, \dots, d$. Položme $f = (f_1, \dots, f_d)$ a $F = (F_1, \dots, F_d)$, kde

$$F_i(x_1, \dots, x_d, u_1, \dots, u_d) = f_i(u_1, \dots, u_d) - x_i, \quad i = 1, \dots, d.$$

Pak $f : G \rightarrow \mathbb{R}^d$ a $F : G \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jsou C^k a $J_F(x, u) = (-\text{Id}_d \mid J_f(u))$.
Pokud

- $(a, b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ splňuje $f(b) = a$ (což je totéž jako $F(a, b) = 0$)
- $\det(J_f(b)) \neq 0$,

potom na okolí bodu a lze definovat zobrazení φ , pro které platí

$$F(x, \varphi(x)) = 0, \text{ což je totéž jako } f(\varphi(x)) = x.$$

Tedy φ je inverzní zobrazení (na okolí bodu a) k zobrazení f .

$$\text{Navíc } J_\varphi(a) = -J_f^{-1}(b)(-\text{Id}_d) = J_f^{-1}(b).$$

Příklady

1. Ukažte, že rovnice $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ určuje v jistém okolí bodu $(0, 1)$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.
2. Ukažte, že rovnice $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 0)$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte Taylorův polynom stupně 2 této funkce se středem v bodě 1.
3. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 1, 1)$ implicitně zadanou funkci (proměnných x a y). Spočtěte gradient této funkce v bodě $(1, 1)$.
4. Ukažte, že rovnice $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}$ určuje v jistém okolí bodu $(0, 1, 1)$ implicitně zadanou funkci (proměnných x a y). Spočtěte gradient této funkce v bodě $(0, 1)$.
5. Ukažte, že soustava $x = e^u + u \sin v$, $y = e^u - u \cos v$ určuje v jistém okolí bodu $(e + 1, e, 1, \frac{\pi}{2})$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (proměnných x a y). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(e + 1, e)$.
6. Ukažte, že soustava $3 = xy^2 + xu + yv^2$, $2 = x^3y + 2xv - u^2v$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 1, 1, 1)$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (proměnných x a y). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(1, 1)$.
7. Ukažte, že soustava $u = \sin x + xy + e^z$, $v = \cos y + xe^{-y}$, $w = x^2 + 2y - \cos(xz)$ určuje v jistém okolí bodu $(1 + \sin 1, 2, 0, 1, 0, 0)$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ (proměnných u , v a w). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(1 + \sin 1, 2, 0)$.