

Spojítost a limity funkcí více proměnných

1. Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

2. Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

3. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

4. Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

5. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \log(x^2+y^2) \sqrt{x^2+y^2}$.

6. Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{4}{3}} y}{x^4+y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

7. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$.

8. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$.

9. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3 - 5x^3}{x^2 + 2y^2}$.

10. Dokažte, že funkce $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}$ splňuje následující: ani jedna z limit $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$, $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ neexistuje, ale limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existuje.