

Spojitosť a limity funkcí více proměnných

1. Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech \mathbb{R}^2 ?

2. Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech \mathbb{R}^2 ?

3. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

4. Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech \mathbb{R}^2 ?

5. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \log(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}$.

6. Je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{4}{3}}y}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

spojitá ve všech bodech \mathbb{R}^2 ?

7. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

8. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

9. Spočítejte limitu (nebo dokažte, že neexistuje) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3-5x^3}{x^2+2y^2}$.

10. Dokažte, že funkce $f(x, y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$ splňuje následující: ani jedna z limit $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$, $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$ neexistuje, ale limita $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existuje.

Derivace funkcí více proměnných

1. Spočtěte parciální derivace podle všech proměnných funkce $f(x, y, z) = xyz - x^3y + 3z^4$.
2. Spočtěte parciální derivace podle všech proměnných funkce $f(x, y) = \sin(xy)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Má tato funkce ve všech bodech \mathbb{R}^2 totální diferenciál?
3. Spočtěte parciální derivace podle všech proměnných funkce $f(x, y, z) = x^{(y^z)}$.
4. Příímým výpočtem ověřte, zda platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pro $f(x, y) = x^2y - e^{y^3x}$.

5. Má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^4}{x^4+y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech \mathbb{R}^2 ?

6. Má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5+y^4}{x^2+y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech \mathbb{R}^2 ?

7. Má funkce $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ totální diferenciál ve všech bodech \mathbb{R}^2 ?

8. Má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech \mathbb{R}^2 ?