

Co budeme potřebovat z teorie

Definice (parciální derivace). *Nechť $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$, $i \in \{1, \dots, d\}$. Říkáme, že f má v bodě a parciální derivaci vzhledem k i -té souřadnici (podle x_i), pokud existuje limita*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

V takovém případě hodnotu limity značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (a nazýváme ji parciální derivací funkce f vzhledem k i -té souřadnici v bodě a).

Vektor

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_d}(a) \right) \in \mathbb{R}^d$$

nazýváme gradientem funkce f v bodě a .

Definice (parciální derivace vyšších řádů). *Nechť $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^d$, $a \in G$, $i, j \in \{1, \dots, d\}$. Parciální derivaci 2. řádu funkce f v bodě a vzhledem k i -té a následně j -té souřadnici definujeme jako*

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a),$$

pokud existuje a značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad \text{pro } i \neq j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \quad \text{pro } i = j.$$

Parciální derivace vyšších řádů definujeme analogicky.

Definice (totální diferenciál). *Nechť $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^d$, $a \in G$. Říkáme, že f má v bodě a totální diferenciál, pokud existuje lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že*

$$\lim_{h \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

V takovém případě nazýváme zobrazení L totálním diferenciálem (derivací) funkce f v bodě a (značíme $df(a)$, $f'(a)$, $D_f(a)$).

Věta (parciální derivace a totální diferenciál). *Nechť f má všechny parciální derivace 1. řádu na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^d$, jsou-li všechny tyto parciální derivace v bodě a spojité, potom f má v bodě a totální diferenciál.*

Věta (tvar totálního diferenciálu). *Má-li f totální diferenciál v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ pak f má všechny parciální derivace 1. řádu v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ a platí*

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i = \nabla f(a) \cdot h.$$

Definice (Jacobiho matice). *Nechť $F = (F_1, \dots, F_m)$ je zobrazení z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^m$. Nechť $F_1, \dots, F_m$ mají všechny parciální 1. řádu v bodě $a \in \mathbb{R}^d$. Jacobiho maticí zobrazení F v bodě a definujeme jako*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_d}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_d}(a) \end{pmatrix}.$$

Věta (tvar derivace zobrazení). *Má-li F derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ potom*

$$F'(a)(h) = J_f(a) \cdot h.$$

Věta (derivace složeného zobrazení). *Nechť $F = (F_1, \dots, F_m)$ je zobrazení z $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^m$ a $G = (G_1, \dots, G_k)$ je zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^k$. Nechť $a \in \mathbb{R}^d$ nechť existují $F'(a)$ a $G'(F(a))$. Potom $(G \circ F)'(a)$ existuje a platí $(G \circ F)'(a) = G'(F(a)) \cdot F'(a)$.*

Příklady

1. Přímým výpočtem ověřte, zda platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pro $f(x, y) = x^2 y - e^{y^3 x}$.
2. Zjistěte, zda platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ pro funkci

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. Spočítejte v bodě $(1, 1)$ derivaci ve směru $(1, -1)$ funkce $f(x, y) = e^{xy^2 - yx^3}$.
4. Spočítejte Jacobiho matici zobrazení $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ daných předpisy $F(x, y) = (xy, x - y)$, $G(u, v) = (e^{uv}, u^2 - v^2)$. Spočítejte Jacobiho matici zobrazení $G \circ F$ (jak přímo, tak za pomoci věty o derivaci složeného zobrazení).
5. Necht' $F(3, 5) = (1, 1)$, $F'(3, 5) = \begin{pmatrix} 1, 3 \\ -2, -2 \end{pmatrix}$, $\nabla g(1, 1) = (4, 4)$. Jak vypadá $\nabla(g \circ F)(3, 5)$?

6. Má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 + y^4}{x^4 + y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

7. Má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

8. Má funkce $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?

9. Má funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & \text{pokud } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{pokud } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

totální diferenciál ve všech bodech $\mathbb{R}^2$?