

V (opakování ze ZS)

Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$, $a < b$. Potom

$$(R) \int_a^b f = \lim_{t \rightarrow b^-} F(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} F(t),$$

kde F je libovolná primitivní funkce k f na (a, b) .

D: (Newtonův integrál)

Nechť f má na (a, b) primitivní funkci F .

Potom definujeme Newtonův integrál od a do b

z funkce f jako

$$(N) \int_a^b f = \lim_{t \rightarrow b^-} F(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} F(t) =: \left[F(t) \right]_{t=a}^{t=b},$$

pokud limita napravo existuje.

Poznámky a příklady:

(1) Pokud $(N)\int_a^b f < \infty$, říkáme, že f je
Newtonovsky integrovatelná od a do b ($(N)\int_a^b f$ konverguje)
Množinu takových funkcí značíme $N((a,b))$.

(2) definují se i tzv. zobecněný Newtonův integrál,
kde požadujeme pouze $F' = f$ na (a,b) mimo
koněčnou množinu

$$(3) \int_0^1 x^a dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 = +\infty & a < -1 \\ \left[\log x \right]_0^1 = +\infty & (a = -1) \\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^1 = \frac{1}{a+1} & a > -1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^a dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_1^\infty = \frac{1}{a+1} & a < -1 \\ \left[\log x \right]_1^\infty = \infty & (a = -1) \\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_1^\infty = \infty & a > -1 \end{cases}$$

Speciálně: funkce $f \in \mathcal{N}((a,b))$ nemusí být omezená
množina $\mathcal{N}((1,\infty))$ je neprázdná

(4) pro $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $x \in (0,1)$ platí $f \in \mathcal{N}((0,1))$,
ale f nelze rozšířit na $[0,1]$, aby $f \in \mathcal{R}([0,1])$

pro $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ $x \in (-1,1)$ platí $f \in \mathcal{R}([-1,1])$,
ale (N) $\int_{-1}^1 f$ neexistuje.

V (vztah $\mathcal{N}((a,b))$ a $\mathcal{R}([a,b])$).

Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b]) \cap \mathcal{N}((a,b))$,

potom $(R) \int_a^b f = (N) \int_a^b f$.

D: Nechť $D \in \mathcal{D}([a,b])$ s dělicími body

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

$$\begin{aligned}
 (N) \int_a^b f &= \lim_{t \rightarrow b^-} F(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} F(t) = G(b) - G(a) \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} [G(x_{i+1}) - G(x_i)] = \sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) =: \mathcal{R}(D)
 \end{aligned}$$

pro nějaká $\xi_i \in (x_i, x_{i+1}) \quad i=0, \dots, n-1$.

Pak ale
$$S(f, D) \leq (N) \int_a^b f \leq S(f, D).$$

A
$$\int_a^b f \leq (N) \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \Rightarrow (N) \int_a^b f = (R) \int_a^b f \quad \square$$

výpočet Newtonova integrálu

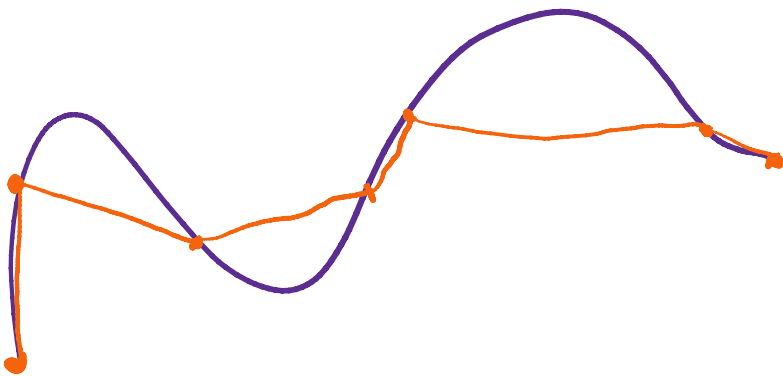
(1) (per partes) necht f a g mají na intervalu (a, b) primitivní funkce F a G . Potom

$$\int_a^b f g = [FG]_a^b - \int_a^b F g$$

(2) (substituce) necht' $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi: (\alpha, \beta) \xrightarrow{na} (a,b)$,
 φ' existuje vlastně na (α, β) a $\varphi' > 0$ ($\varphi' < 0$) na
 (α, β) , potom

$$\int_a^b f = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'| \cdot f \circ \varphi$$

$\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ křivka, $D \in \mathcal{D}([a,b])$



$$L(\gamma, D) = \sum | \gamma(x_{i+1}) - \gamma(x_i) |$$

délka křivky γ : $l(\gamma) = \sup_{D \in \mathcal{D}([a,b])} L(\gamma, D)$.

pokud supremum existuje.

$$\begin{aligned}
L(f, D) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \right)^2} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sqrt{1 + f'(s_i)^2}
\end{aligned}$$

prv

$$g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$$s(g, D) \leq L(f, D) \leq S(g, D).$$

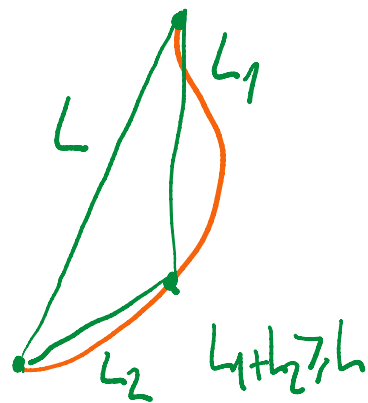
tedy $s(g, D) \leq l(f) \approx \int_a^b g \leq l(f). \quad (*)$

Potřebujeme ještě $l(f) \leq \int_a^b g$.

Všimneme si, že platí

$$L(f, D) \leq L(f, D^*),$$

je-li D^* zjemněním D



Tedy pro $D, D^* \in \mathcal{D}([a, b])$ libovolná a D^{**} jejich společné zjemnění platí

$$L(f, D) \leq L(f, D^{**}) \leq S(g, D^{**}) \leq S(g, D^*)$$

To dává $L(f, D) \leq \int_a^b g, \quad D \in \mathcal{D}([a, b]).$

a tedy $l(f) \leq \int_a^b g$. (xx)

Je-li f' spojitá na $[a, b]$, potom

$$g \in R([a, b]) \quad \text{a}$$

$$\ell(f) = \int_a^b g = \overline{\int_a^b g} = (R) \int_a^b g.$$

Gamma funkce

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x \in (0, \infty)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = [e^{-x}]_0^{\infty} = 1$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = [-x^{\alpha-1} e^{-x}]_0^{\infty} + (\alpha-1) \int_0^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} dx \\ &= 0 + (\alpha-1) \Gamma(\alpha-1). \end{aligned}$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \quad \Gamma(3) = 2 \quad \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3!$$

$$\Gamma(5) = 4 \cdot \Gamma(4) = 4! \quad \dots \quad \Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = 2 \int e^{-t^2} dt = I.$$

$$t = \sqrt{x} \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$x = t^2$$

nehýlo na
přednášce

$$4 I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(t^2+s^2)} ds dt$$

$$\begin{aligned} s &= r \cos \varphi & \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ t &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \underline{r e^{-r^2}} dr d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi = \pi$$

$$4 I^2 = \pi \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Volme $x \in (0, \infty)$ pevně

$F(t)$ primitivní funkce k $t^{x-1}e^{-t}$ na $(0, \infty)$

potom F je rostoucí, tedy $\lim_{t \rightarrow 0^-} F(t)$ a $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$

existují. Navíc

$$\begin{aligned} F(1) - F(\varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_{\varepsilon}^1 t^{x-1} \\ &\leq \int_0^1 t^{x-1} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Tedy
$$F(\varepsilon) \geq F(1) - \frac{1}{x}$$

a
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} F(\varepsilon) \geq F(1) - \frac{1}{x} > -\infty$$

Obdobně pro $x \rightarrow +\infty$.

Tedy integrál $\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dx$ konverguje

pro $x \in (0, \infty)$ a $\Gamma(x)$ je dobře definována.