

D (číselná řada)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečnou řadou. Čísla $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$, $N \in \mathbb{N}$ pak nazýváme jejími částečnými součty.

D (součet číselné řady)

Součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ označujeme hodnotu

$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$, pokud limita napravo existuje.

Řekneme, že řada:

- konverguje, pokud $S \in \mathbb{R}$
- diverguje, pokud nekonverguje
- diverguje k $\pm \infty$, pokud $S = \pm \infty$
- osciluje, pokud $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ neexistuje

Poznámky a příklady:

$$(1) \quad \sum q^n \begin{cases} \text{konverguje} & |q| < 1 \\ \text{diverguje} & k + \infty \quad q \geq 1 \\ \text{osciluje} & \text{jinak} \end{cases}$$

$$(2) \quad \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\alpha} \\ \leq 1 + \sum_{n=2}^N (R) \int_{n-1}^n \frac{1}{x^\alpha} dx \\ = 1 + (N) \int_1^N \frac{1}{x^\alpha} dx \leq 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx < K$$

Tedy S_N je shora omezená rostoucí posloupnost a řada konverguje.

Obdobně $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje $k + \infty$ pro $\alpha \leq 1$.

(3) konvergence/divergence řady se nezmění,
pokud změníme posloupnost $\{a_n\}$ na
konečné mnoha členech.

(4) (aritmetika řad) pokud $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$,
a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom

$$\sum \alpha a_n + \beta b_n = \alpha A + \beta B,$$

ma-li výraz napravo smysl.

(nutná podmínka konvergence)

Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

D: BC podmínka dává

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N:$$

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N: |s_{n+1} - s_n| < \varepsilon$$

$$\text{Tedy } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - s_n = 0. \quad \square$$

Řady s kladnými členy

Pro celou tuto část budeme předpokládat

$$a_n > 0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

(Srovnávací kritérium)

Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ mají nezáporné členy

a existuje $N \in \mathbb{N}$, že $a_n \leq b_n \quad n \geq N$.

- Potom
- $\sum b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum a_n$ konverguje
 - $\sum a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum b_n$ diverguje

D: BÚNO $N=1$. Potom pro

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad t_n = \sum_{k=1}^n b_k.$$

Zjervě $S_n \leq t_n \quad n \in \mathbb{N}$

Tedy $S_n \leq T \quad n \in \mathbb{N}$

a $S \leq T$, kde

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad T = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

✓ (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = L$. Potom

- (1) $L > 0 \Rightarrow (\sum b_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum a_n \text{ konverguje})$
- (2) $L < \infty \Rightarrow (\sum b_n \text{ diverguje} \Rightarrow \sum a_n \text{ diverguje})$
- (3) $L \in (0, \infty) \Rightarrow (\sum b_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum a_n \text{ konverguje})$

D: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = L > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N: \frac{b_n}{a_n} > L$$

Tedy $b_n > L a_n$ a stačí použít
srovnávací krit na řady $\sum \tilde{b}_n$ a $\sum a_n$,
kde $\tilde{b}_n = L b_n$.