

V (podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má kladné členy a $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Potom (1) $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

(2) $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

D: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1 \Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N: \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{L+1}{2} =: q$ (L, 1)
✓

Tedy $a_{n+1} \leq q a_n, n \geq N$

a $a_{N+k} \leq q^k a_N, k \geq 1$

$q < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_N q^k < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N: \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ $a_{n+1} > a_n$
✓

Tedy neplatí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.



V (odmochinové kritérium)

Nechť má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kladné členy a

a $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$. Potom

stačí!
 $\limsup_{n \rightarrow \infty}$

$$(1) L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,$$

$$(2) L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

D: Podobný jako u podílového krit.

$$\sum \frac{3^n}{n!} \left(\begin{array}{l} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 \\ \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0 \end{array} \right)$$

Řada konverguje.

$$\sum \frac{n!}{n^n} \rightarrow \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

Řada konverguje.

$\sum_{n=1}^{\infty} 1$ nemáme rozhodnout.

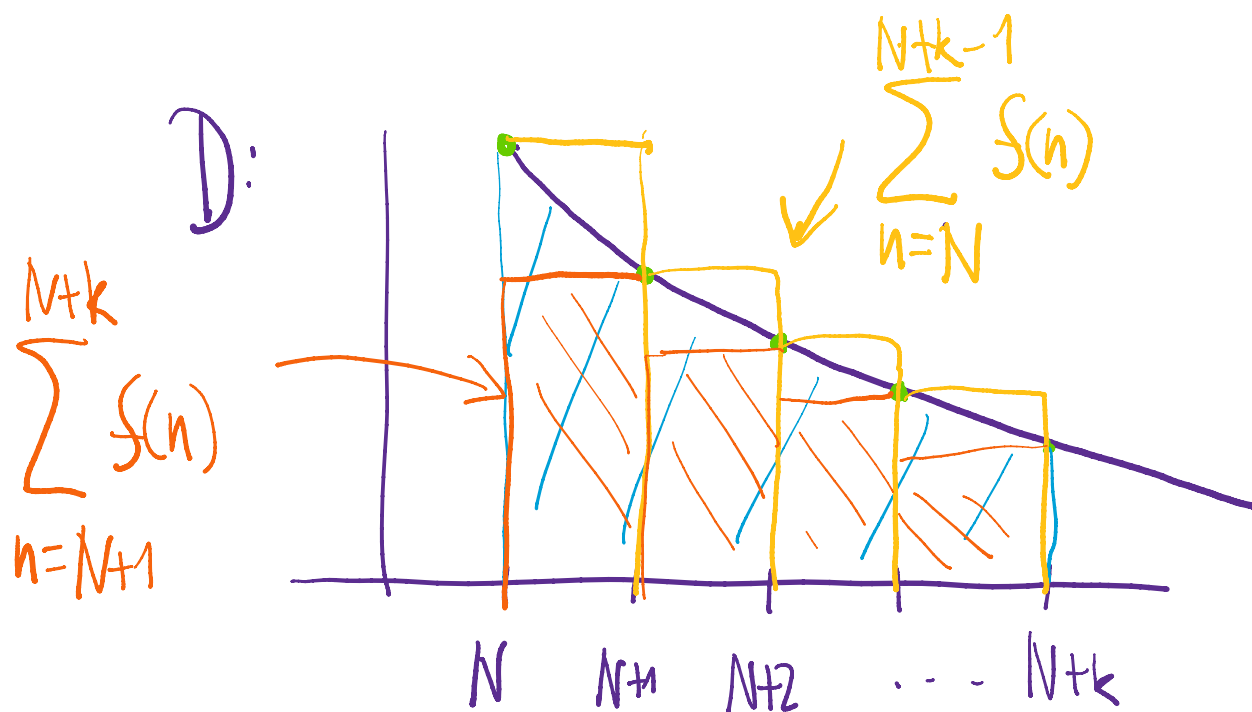
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \rightarrow \frac{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \rightarrow 1$$

V (integrální kritérium)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $f: [N, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je nezáporná spojitá a klesající na $[N, \infty)$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow (N) \int_N^{\infty} f(x) < \infty,$$

pokud $a_n = f(n)$, $n \geq N$.



$$\sum_{n=N+1}^{N+k} f(n) \leq \overset{(N)}{=} \int_N^{N+k} f \leq \sum_{n=N}^{N+k-1} f(n)$$

pro $k \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq (N) \int_N^{\infty} f \leq \sum_{n=N}^{\infty} f(n)$$



$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{1+\varepsilon} n} < \infty \Leftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^{1+\varepsilon} x} < \infty$$

Řady s obecnými členy - alternující řady

Tedy řady ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n \geq 0 \quad n \in \mathbb{N}.$$

D(absolutní konvergence)

Říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně,

pokud $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

V(absolutní konvergence a konvergence)

Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně,
potom konverguje.

$$D: t_n = \sum_{k=1}^n |a_k|, S_n = \sum_{k=1}^n a_k. \text{ Potom}$$

$$\sum |a_n| < \infty$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N: |t_m - t_n| < \varepsilon$$

$$\left[\begin{array}{l} m > n \\ |t_m - t_n| = \sum_{k=n+1}^m |a_k| \geq \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \geq |S_m - S_n| \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N: |S_m - S_n| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje.}$$

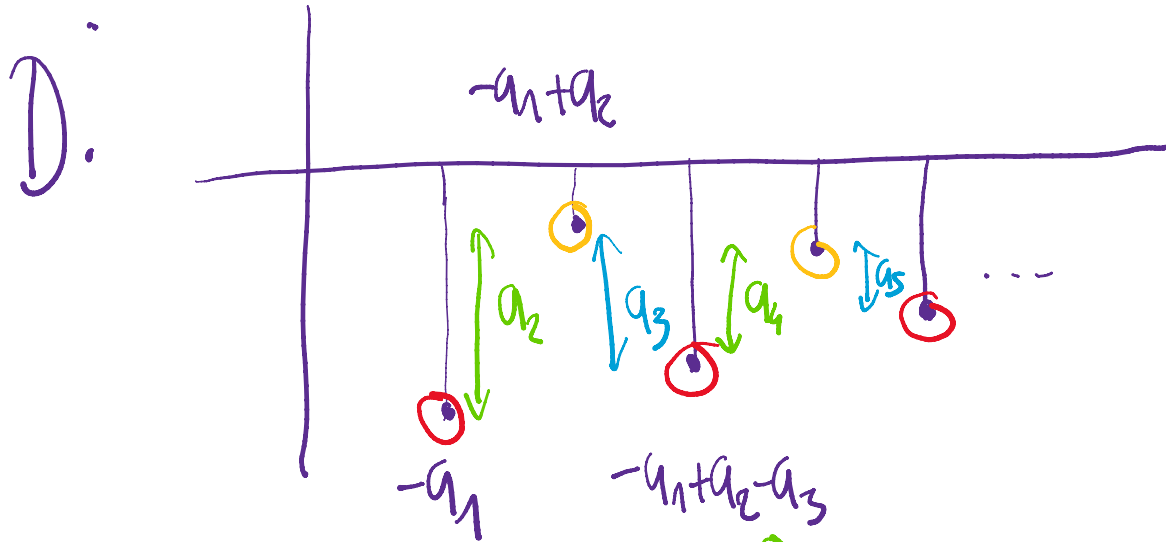


$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ konverguje. Co } \sum \frac{(-1)^n}{n} ?$$

V (Leibnizovo kriterium)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje.



$$S_{2N+2} = S_{2N} \overbrace{-a_{2N+1} + a_{2N}}^{\leq 0} \leq S_{2N}$$

$$S_{2N+1} = S_{2N-1} \overbrace{+a_{2N} - a_{2N+1}}^{\geq 0} \geq S_{2N-1}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N} = S \in \mathbb{R}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N-1} = T \in \mathbb{R}$$

$$S - T = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_{2N} - S_{2N-1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} a_{2N} = 0 \quad \square$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje.

Poznámka: je dobré si všimnout, že pro $a_n = \frac{1}{n}$

$$\text{platí } \sum a_{2n} = \infty, \quad \sum a_{2n-1} = \infty$$

Tedy kladná i záporná část řady $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ divergují. Toto bude platit obecně.

Pokud řada $\sum a_n$ konverguje, ale nekongruje absolutně, pak $\sum a_n^+ = \sum a_n^- = \infty$.