**Poznámky a příklady.** *1. (inverzní zobrazení) Nechť $V \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $G : V \to \mathbb{R}^d$, $G \in C^1(V)$, $b \in V$, $\det J_G(b) \neq 0$. Definujme $F : \mathbb{R}^d \times V \to \mathbb{R}^d$ jako*

$$F(x,u) = G(u) - x, \quad (x,u) \in \mathbb{R}^d \times V =: U \subset \mathbb{R}^{2d}.$$

*Potom pro $a = (G(b), b)$ (a obvyklé značení pro $J_X$ a $J_U$ jako ve větě o implicitní funkci) platí*

$$F(a) = G(b) - G(b) = 0, \quad \det J_U = \det J_G(b) \neq 0, \quad J_X = -\operatorname{Id}.$$

*Tedy existuje $\delta > 0$ a zobrazení $\varphi : U(G(b), \delta) \to \mathbb{R}^d$, pro které platí $F(x, \varphi(x)) = 0$, $x \in U(G(b), \delta)$ a $\varphi(G(b)) = b$. To je ale totéž jako*

$$G(\varphi(x)) = x, \quad x \in U(G(b), \delta).$$

*Zobrazení $\varphi$ je tedy inverzním zobrazením k zobrazení $G$ na okolí bodu $G(b)$ (proto budeme psát $G^{-1}$ místo $\varphi$). Navíc platí $G^{-1} \in C^1(U(G(b), \delta))$ a*

$$J_{G^{-1}}(G(b)) = -J_U^{-1} J_X = -(J_G(b))^{-1}(-\operatorname{Id}) = (J_G(b))^{-1}.$$

*Zobrazením $G \in C^1(U)$, pro která platí $\det J_G(x) \neq 0$, $x \in U$, říkáme regulární. V dimenzi jedna jsme si v zimním semestru dokázali existenci globální inverzní funkce k funkci $f$ splňující například $f' > 0$ na intervalu. Ve vyšší dimenzi ovšem nemůžeme existenci globální inverze regulárních zobrazení očekávat, stačí uvážit zobrazení $G : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definovaného jako $G(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. To je regulární ($\det J_G(r, \varphi) = r > 0$), ale nemá globální inverzi.*

## 0.1 Extrémy funkcí více proměnných

Extrémy u funkcí více proměnných definujeme analogicky jako v dimenzi 1.

**Věta 1** (nutná podmínka pro lokální extrém). *Pokud má $f$ v bodě $a$ lokální extrém a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existuje, potom $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

**Definice 2** (Hessova matice). *Nechť má funkce $f : \mathbb{R}^d \supset D_f \to \mathbb{R}$ všechny derivace 2. řádu v bodě $a$. Hessovu matici funkce $f$ v bodě $a$ definujeme jako*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_d \partial x_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_d}(a) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(a) \end{pmatrix}$$

**Věta 3** (záměnnost parciálních derivací). *Nechť $f \in C^2(U)$, $a \in U$, potom pro $i, j \in \{1, \dots, d\}$ platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Spaciálně výše uvedená věta implikuje, že pro funkci $f \in C^2(U)$ a $a \in U$ je $H_f(a)$ symetrická matice.

Uspořádanou $N$-tici $\alpha = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{N}_0^N$ budeme nazývat multiindexem. Velikostí multiindexu $\alpha$ pak budeme nazývat hodnotu $|\alpha| = a_1 + \dots + a_N$. Dále definujeme

$$\binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{a_1! \cdots a_N!},$$

pro $f \in C^{|\alpha|}(U)$ a $a \in U$ derivaci funkce $f$ v bodě $a$ vzhledem k (podle) multiindexu $\alpha$ jako

$$D^\alpha f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_N^{a_N}}(a)$$

a mocninu $x \in \mathbb{R}^N$ na multiindex $\alpha$ jako

$$x^\alpha = x_1^{a_1} \cdots x_N^{a_N}.$$