

(1)(a)(i) tvrzení neplatí, stačí uvést funkci $g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \cdot y = 0 \\ 0 & x \cdot y \neq 0 \end{cases}$
pro tu platí $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$, ale g není spojitá
v $(0,0)$ a tedy $dg(0,0)$ neexistuje. Nakonec stačí
položit $f(x,y) = g(x+1, y+5)$.

(ii) tvrzení platí, podle věty o vlastnostech tot. diferenciálu
platí, že $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ existují na $\mathbb{R}^2$ a pro $a \in \mathbb{R}^2$ platí

$$df(a) \cdot (h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot h_2$$

Protože zobrazení $a \mapsto df(a)$ je spojitě, jsou spojitě
i $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ (jako jeho složky).

(2)(c) Chceme použít větu o součinném řádku, tedy musíme ověřit, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je absolutně konvergentní pro $x \in \mathbb{R}$.

Pro $x=0$ není co dokazovat, volme $x \neq 0$, pak pro $a_n = \frac{x^n}{n!}$

platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0$ a tedy je řada $\sum a_n$

konvergentní podle podílového kritéria.

Dále už stačí psát

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \right)$$

věta o součinném řádku

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^{n-m}}{(n-m)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} x^m y^{n-m}$$

binomická věta

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = \exp(x+y).$$

(3)c) Označme $\varphi(x) = \frac{1}{2} \arctan x$ a volte $x, y \in \mathbb{R}, y > x$.

Podle věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (x, y)$,

že $f(y) - f(x) = \varphi'(\xi)(y-x)$. Potom ale

$$|f(y) - f(x)| \leq |\varphi'(\xi)| \cdot |y-x| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} |y-x| \leq \frac{|y-x|}{2},$$

a stačí tedy zvolit $r = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, aby pro $x \neq y$ platilo

$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq r |y-x|$, navíc, pro $x=y$ platí rovnost triviálně.

(d) Někdy se ověříme axiomy metriky pro ϕ . Zřejmě

$$\phi: (M \times X) \times (M \times X) \rightarrow [0, \infty), \text{ dále}$$

$$\phi((a, x), (a, x)) = \varphi(a, a), d(x, x) = 0 \text{ a pokud}$$

$$0 = \phi((a, x), (b, y)) = \varphi(a, b) + d(x, y) \text{ potom}$$

$$\phi((a, b), d(x, y)) = 0 \text{ (protože, } \varphi, d \geq 0) \text{ a tedy, } a=b \text{ a } x=y.$$

$$\text{Dále } \phi((a, x), (b, y)) = \varphi(a, b) + d(x, y) = \varphi(b, a) + d(y, x)$$

$$= \phi((b, y), (a, x)),$$

a zbývá ověřit trojúhelníkovou nerovnost.

$$\begin{aligned}\phi((a,x), (b,y)) &= g(a,b) + d(x,y) \leq g(a,c) + g(b,c) \\ &\quad + d(x,z) + d(y,z) \\ &= \phi((a,x), (c,z)) + \phi((b,y), (c,z)).\end{aligned}$$

Pro úplnost prostoru $(M \times X, \phi)$ volíme posloupnost

$t_n = (a_n, x_n) \in M \times X$, pro kterou platí

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N: \phi(t_n, t_m) < \varepsilon.$$

Platnost $(*)$ a definice ϕ implikují platnost výroků

$$(**) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N: g(a_n, a_m) < \varepsilon$$

$$(***) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N: d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Podle $(**)$ a $(***)$ existují $a \in M$ a $x \in X$, že

$$a_n \rightarrow a, \quad x_n \rightarrow x. \quad \text{Dokážeme } (a_n, x_n) \rightarrow (a, x).$$

Pro $\varepsilon > 0$ existuje $N \in \mathbb{N}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq N$ platí

$$g(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \text{Potom ale}$$

$$\phi((a_n, x_n), (a, x)) \leq g(a_n, a) + d(x_n, x) < \varepsilon, \quad \text{což}$$

nám stačí.