

Řešíme rovnici $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$

Jde o lineární rovnici s konstantními koeficienty. Charakteristický polynom

homogenní rovnice je $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 2)$

kořeny jsou tedy 0, -1 a 2 a $FS = \{1, e^{-x}, e^{2x}\}$.

Pravá strana je součtem dvou funkcí ve speciálním tvaru

Budeme tedy řešit zvlášť dvě rovnice $y''' - y'' - 2y' = e^{2x}$ (*)

$$y''' - y'' - 2y' = x^3 + 3x^2 + 1 \quad (*)$$

Řešení rovnice (*) hledáme ve tvaru

$$y_p = A x e^{2x}, \quad \text{↙ násobnost kořene 1}$$

$$\text{máme } y_p' = A e^{2x} + 2A x e^{2x}, \quad y_p'' = 4A e^{2x} + 4A x e^{2x}, \quad y_p''' = 12A e^{2x} + 8A x e^{2x}$$

Po dosazení do (*) dostáváme

$$\underline{12A e^{2x}} + \underline{8A x e^{2x}} - \underline{4A e^{2x}} - \underline{4A x e^{2x}} - \underline{2e^{2x}} - \underline{4A x e^{2x}} = e^{2x}$$

$$6A = 1, \quad A = \frac{1}{6}$$

Řešení rovnice (*) hledáme ve tvaru $y_q = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$ ↙ násobnost kořene 1

$$\text{Platí } y_q' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D, \quad y_q'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

$$y_q''' = 24Ax + 6B$$

Po dosazení do (*) dostáváme

$$\underline{24Ax} + \underline{6B} - \underline{12Ax^2} - \underline{6Bx} - \underline{2C} - \underline{8Ax^3} - \underline{6Bx^2} - \underline{4Cx} - \underline{2D} = \underline{x^3 + 3x^2 + 1}$$

Tedy dostáváme soustavu

$$\underline{-8A = 1}, \quad \underline{-12A - 6B = 3}, \quad \underline{24A - 6B - 4C = 0}$$

$$6B - 2C - 2D = 1$$

$$\text{Ta má řešení: } A = -\frac{1}{8}, \quad B = -\frac{1}{2} - 2A = -\frac{1}{4}$$

$$C = 6A - \frac{3}{2}B = -\frac{3}{8},$$

$$D = -\frac{1}{2} - C + 3B = -\frac{7}{8}$$

Celkové tedy dostáváme

$$y_p = \frac{x}{6}e^{2x}, \quad y_q = -\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{8} - \frac{7x}{8}$$

a obecné řešení původní rovnice má tvar

$$y = C + De^{-x} + Ee^{2x} + \frac{x}{6}e^{2x} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{8} - \frac{7x}{8}.$$