

Vyšetřujeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\log^{123} n}{n} \sin \frac{\pi n}{4}}_{\alpha_n}$

(1) absolutní konvergence:

$$\text{pro } n = 2 + 8k \text{ platí } \left| \frac{\log^{123} n}{n} \sin \frac{\pi n}{4} \right| \geq \frac{\log^{123} 2}{n}$$

a srovnáním s harmonickou řadou dostaneme,

$$\text{že } \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{2+8k}| = \infty \text{ a tedy i } \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| = \infty.$$

Řada tedy nekoniuguje absolutně

(2) konvergence: označme $a_n = \frac{\log^{123} n}{n}$, $b_n = \sin \frac{4\pi}{n}$

Víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ má omezené částečné součty (*)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (*)$$

Dokážeme ještě: $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n > N: a_{n+1} \leq a_n$ (*)

Označme $f(x) = \frac{\log^{123} x}{x}$, $x \geq 1$

$$\text{Potom } f'(x) = \frac{123 \log^{122} x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \log^{123} x}{x^2} = \log^{122} x \cdot \frac{123 - \log x}{x^2}$$

Tedy $f'(x) < 0$ pro $x > e^{123}$ a stačí položit $N = \lceil e^{123} \rceil$.

Nyní stačí použít $(*)$, $(\times)$ a $(\times)$, které společně s Dirichletovým kritériem dávají konvergenci řady.