Cvičení z NSTP022
18. – 22. 2. 2013

Klasická pravděpodobnost

1. Házíme čtyřmi hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že
   (a) padnou čtyři různá čísla,
   (b) padnou pouze lichá čísla,
   (c) součet čísel na všech kostkách dohromady bude roven 6,
   (d) součet čísel bude větší než 5?

2. S jakou pravděpodobností padne alespoň jedna šestka, házíme-li
   (a) dvěma kostkami,
   (b) n kostkami.

3. Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek (již s nadepsanou adresou). Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
   (a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
   (b) S jakou pravděpodobností není žádný dopis ve správné obálce? Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$.

4. **Maxwellovo-Boltzmannovo schéma.**
   Mějme r **rozlišitelných** předmětů a n přihrádek. Předměty náhodně rozmístíme do přihrádek, přičemž všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná. Určete
   (a) pravděpodobnost, že daná přihrádka obsahuje právě k předmětů,
   (Návod: Uvažujte uspořádané r-tice z čísel $1 \ldots n$ zaznamenávající, v které přihrádce daný předmět je.)
   (b) limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$,
   (c) pravděpodobnost, že žádná přihrádka není prázdná.
   (Návod: Je jednodušší spočítat pravděpodobnost jevu opačného.)

5. **Boseovo-Einsteinovo schéma.**
   Mějme r **nerozlišitelných** předmětů a n přihrádek. Předměty náhodně rozmístíme do přihrádek, přičemž všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná. Určete
   (a) pravděpodobnost, že daná přihrádka obsahuje právě k předmětů,
   (Návod: Uvažujte vhodné „grafické“ znázornění.)
   (b) limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$,
   (c) pravděpodobnost, že žádná přihrádka není prázdná.
   (Návod: Počítejte přímo pravděpodobnost tohoto jevu a opět použijte vhodné „grafické“ znázornění.)

6. Do vlaku s 10 vagóny nastoupilo 16 cestujících, přičemž každý cestující si náhodně vybral jeden vagón. Určete pravděpodobnost, že do každého vagónu nastoupil alespoň jeden cestující.
   (Návod: Hodí se jedno z výše uvedených schémat.)

Opakování z přednášky

Klasická definice pravděpodobnosti:

- Ω je množina všech možných výsledků náhodného pokusu
- $\omega \in \Omega$ elementární jev
- $A \subset \Omega$ náhodný jev
- Nechť Ω obsahuje **konečný** počet prvků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, a nechť všechny elementární jevy ω_i jsou **stejně pravděpodobné**. Pak pravděpodobnost náhodného jevu A definujeme jako
$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n},$$
kde $|A|$ = počet prvků množiny A.

Vlastnosti:

- $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$,
- $\mathsf{P}(A^c) = 1 - P(A)$,
- jestliže $A \subset B$, pak $\mathsf{P}(A) \leq \mathsf{P}(B)$ a $\mathsf{P}(B \setminus A) = \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A)$,
- $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(A \cap B^c)$,
- $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$,
- $\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum\sum_{i<j} \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} \mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$.

Výsledky

1. (a) 5/18; (b) 1/16; (c) 10/1296; (d) 1291/1296

2. (a) 11/36; (b) $1 - 5^n/6^n$

3. (a) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}/k! = 1 - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k!$;
   (b) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k/k! \to \mathrm{e}^{-1} = 1/\mathrm{e}$ pro $n \to \infty$

4. (a) $\mathsf{P}(A_k) = \binom{r}{k}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k$ pro $k = 0, 1, \ldots, r$ a $\mathsf{P}(A_k) = 0$ pro $k > r$;
   (b) $\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}/k!$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$;
   (c) $\mathsf{P}(C) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \binom{n}{k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^r$ pro $r \geq n$ a $\mathsf{P}(C) = 0$ pro $r < n$

5. (a) $\mathsf{P}(A_k) = \frac{\binom{n+r-k-2}{r-k}}{\binom{n+r-1}{r}} = \frac{r!(n+r-2-k)!(n-1)}{(r-k)!(n+r-1)!}$ pro $k = 0, 1, \ldots, r$ a $\mathsf{P}(A_k) = 0$ pro $k > r$;
   (b) $\frac{\lambda^k}{(1+\lambda)^{k+1}}$ pro $k = 0, 1, \ldots$;
   (c) $\mathsf{P}(C) = \frac{(r-1)!r!}{(n+r-1)!(r-n)!}$ pro $r \geq n$ a $\mathsf{P}(C) = 0$ pro $r < n$

6. 0,070 (použije se Maxwellovo-Boltzmannovo schéma)