

Náhodná veličina — Diskrétní rozdělení

1. V peněžence máte dvě papírové padesátikoruny, jednu stokorunovou a jednu dvoustakorunovou bankovku. Zloděj Vám z peněženky náhodně vybere dvě bankovky. Označme jako X náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli.
 - (a) Určete rozdělení X a spočítejte Vaši očekávanou ztrátu.
 - (b) Nakreslete distribuční funkci veličiny X . Jaké jsou obecné vlastnosti distribuční funkce?
 - (c) Zloděj následně zaplatí 100 Kč za špatné parkování a doma mu manželka zabaví čtyři pětiny z toho, co donese. Označme jako Y veličinu udávající částku, která zlodějovi po tom všem zůstane. Určete rozdělení a očekávanou hodnotu Y .
 - (d) Určete rozptyl veličiny Y .
 - (e) S jakou pravděpodobností si bude zloděj moci večer v hospodě koupit jedno pivo za 21 Kč?
2. Test obsahuje n otázek, ke každé z nich jsou uvedeny 4 možnosti a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpověď správná. Předpokládejme, že student zaškrtnává odpovědi zcela náhodně. Označme X počet správně zodpovězených otázek.
 - (a) Odvoďte rozdělení veličiny X . Jak se toto rozdělení nazývá? (Znáte ho z přednášky.)
 - (b) Jaký je střední (očekávaný) počet správně zodpovězených otázek?
 - (c) Jaký je rozptyl počtu správně zodpovězených otázek?
 - (d) Jaká je pravděpodobnost, že student odpoví alespoň jednu otázku správně?
 - (e) Jaký by byl střední počet a rozptyl správně zodpovězených otázek, kdyby na každou otázku bylo k možných odpovědí a z nich vždy právě jedna správná? Pro jaké k je rozptyl maximální?
Poznámka: Výpočet střední hodnoty $E X$ a rozptylu $\text{Var } X$ můžete provést buď z definice nebo pomocí momentové vytvořující funkce.
3. Veličina X určuje počet příchozích hovorů na policejní stanici za jednu hodinu. Lze předpokládat, že na stanici přijde právě k hovorů s pravděpodobností $\lambda^k e^{-\lambda} / k!$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$, kde $\lambda > 0$.
 - (a) Ověřte, že se jedná o pravděpodobnostní rozdělení. Jak se toto rozdělení nazývá?
 - (b) Určete očekávaný počet příchozích hovorů za jednu hodinu. (Výpočet proveďte z definice.)
 - (c) Vypočítejte $E X$ a rozptyl $\text{Var } X$ pomocí momentové vytvořující funkce.
4. Uvažujme loterii, ve které je každý stírací los výherní s pravděpodobností p a nevýherní s pravděpodobností $1 - p$, kde $p \in (0, 1)$. Předpokládejme, že jsme se rozhodli kupovat losy, dokud nevyhrajeme (a pak už žádné další nekoupíme).
 - (a) Určete rozdělení a očekávaný počet zakoupených nevýherních losů.
 - (b) Předpokládejme, že výhra v dané loterii je 100 000 Kč a jeden los stojí 100 Kč. Jaké musí být alespoň p , aby se nám celá naše strategie vyplatila?
5. Na stole leží dvě urny A a B: V urně A jsou dvě bílé a dvě černé kuličky a v urně B jsou dvě černé a jedna bílá kulička. Náhodně vybereme z každé urny jednu kuličku a z těchto dvou kuliček pak náhodně zvolíme jednu. Definujme náhodnou veličinu X jako identifikátor toho, zda jsme takto obdrželi bílou kuličku (tj. $X = 1$, je-li výsledná kulička bílá, a $X = 0$ jinak). Určete rozdělení veličiny X , její střední hodnotu a rozptyl. Jak se toto rozdělení nazývá?
6. Viz příklad 8 z minulého cvičení ($K \rightarrow F \rightarrow C$). Jaký je očekávaný počet Cyrilových hodů kostkou?
7. Diskrétní náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $1, 2, \dots, n$, a to s pravděpodobnostmi $P(X = k) = c \cdot k$ $k = 1, \dots, n$. Určete konstantu $c > 0$ tak, aby se jednalo o pravděpodobnostní rozdělení, a střední hodnotu $E X$.

Opakování z přednášky

Náhodná veličina X je měřitelné zobrazení (funkce) z prostoru (Ω, \mathcal{A}) do $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

- **Rozdělení** náhodné veličiny X je pravděpodobnostní míra P_X na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ taková, že pro $B \in \mathcal{B}$ je $P_X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$.
- **Distribuční funkce** je funkce reálné proměnné $x \in \mathbb{R}$ definovaná jako $F(x) = P(X \leq x)$. Distribuční funkce jednoznačně určuje rozdělení veličiny X !
- **Střední hodnota** veličiny X je definována jako $E X = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$. Vyjadřuje „očekávanou hodnotu“ veličiny X .
- **Rozptyl** veličiny X je definován jako $\text{Var}(X) = E(X - E X)^2 = E X^2 - (E X)^2$ (jestliže $E X$ a $E X^2$ existují). Rozptyl je vždy **nezáporné** číslo!
- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí

$$E(a + bX) = a + b E X, \quad \text{Var}(a + bX) = b^2 \text{Var}(X).$$

- **Momentová vytvořující funkce** veličiny X je funkce reálné proměnné $t \in \mathbb{R}$ definovaná jako $\psi(t) = E e^{tX}$ (existuje-li). Platí

$$E X = \psi'(0), \quad \text{Var}(X) = \psi''(0) - (\psi'(0))^2.$$

Diskrétní rozdělení: Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha (tj. konečně nebo spočetně) hodnot x_1, x_2, \dots , říkáme, že má **diskrétní rozdělení**.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
- **Distribuční funkce** je po částech konstantní, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k .
- **Střední hodnota** X se spočítá jako

$$E X = \sum_k x_k P(X = x_k) = \sum_k x_k p_k \quad (\text{existuje-li}).$$

Střední hodnota náhodné veličiny $Y = h(X)$ se spočítá jako

$$E Y = E h(X) = \sum_k h(x_k) P(X = x_k) = \sum_k h(x_k) p_k \quad (\text{existuje-li}),$$

nebo přímo z rozdělení Y jako $E Y = \sum_y y P(Y = y)$.

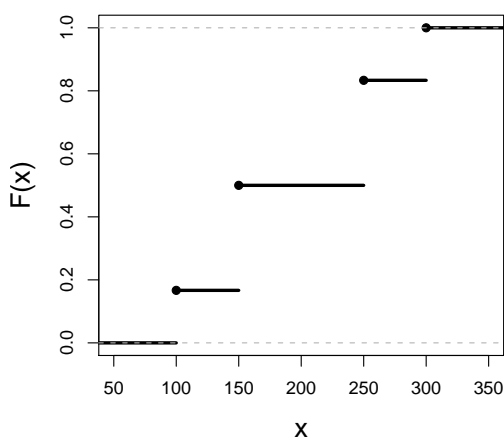
Užitečné vzorce

- Binomická věta: Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{(n-k)} = (a + b)^n$.
- Pro $x \in \mathbb{R}$ platí $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ (rozvoj exponenciály).
- Je-li $|q| < 1$, pak $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ (geometrická řada).
Derivováním podle q dostaneme $\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Výsledky

- 1.(a) rozdělení X : $P(X = 100) = 1/6$, $P(X = 150) = 1/3$, $P(X = 250) = 1/3$, $P(X = 300) = 1/6$;
očekávaná ztráta $EX = 200$,

$$(b) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 100, \\ 1/6, & x \in [100, 150), \\ 1/2, & x \in [150, 250), \\ 5/6, & x \in [250, 300), \\ 1, & x \geq 300. \end{cases}$$



- (c) rozdělení Y : $P(Y = 0) = 1/6$, $P(Y = 10) = 1/3$, $P(Y = 30) = 1/3$, $P(Y = 40) = 1/6$;
střední hodnota $EY = 20$,
- (d) $\text{Var } Y = 200$,
- (e) $P(Y \geq 21) = 1/2$.
2. (a) $P(X = k) = \binom{n}{k} (1/4)^k (3/4)^{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$, binomické rozdělení s parametry n a $1/4$,
(b) $EX = n/4$,
(c) $\text{Var } X = 3n/16$,
(d) $P(X \geq 1) = 1 - (3/4)^n$
(e) $EX = n/k$, $\text{Var } X = n(k-1)/k^2$, rozptyl je maximální pro $k = 2$
Výpočet EX a $\text{Var } X$ buď přímo z definice nebo pomocí momentové vytvořující funkce. Pro binomické rozdělení $\text{Bi}(n, p)$ je $\psi(t) = [pe^t + 1 - p]^n$.
3. (a) Poissonovo rozdělení s parametrem λ , (b) $EX = \lambda$, (c) $\text{Var } X = \lambda$, $\psi(t) = \exp\{-\lambda + \lambda e^t\}$
4. (a) geometrické rozdělení: $P(X = k) = (1 - p)^k p$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$,
(b) Aby se nám hra vyplatila (očekávaný zisk je kladný), musí být výherní alespoň jeden los z tisíce.
5. alternativní rozdělení s parametrem $p = 5/12$, $EX = 5/12$, $\text{Var } X = 35/144$
6. $EX = 150/91$
7. $c = \frac{2}{n(n+1)}$, $EX = (2n + 1)/3$