Cvičení z NSTP022
25. 3. – 29. 3. 2013

Náhodné vektory II.

1. Nechť X a Y jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny. Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl veličiny $Z = X + Y$, jestliže
   (a) X, Y mají exponenciální rozdělení $\mathsf{Exp}(\lambda)$,
   (b) X, Y mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0, 1)$.
   (Na rozmyšlení: Jaká je hustota $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde $X_i \sim \mathsf{Exp}(\lambda)$ jsou nezávislé?)

2. Náhodný vektor $(X, Y)'$ v příkladě 2 z minulého cvičení udával útratu za jídlo a pití na rodinné oslavě a měl sdružené rozdělení s hustotou $f(x, y) = x + y$ pro $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ a $f(x, y) = 0$ jinak. Označte $W = X - Y$ a $Z = X + Y$
   (a) Jaká je střední hodnota a rozptyl náhodných veličin W a Z?
   (b) Spočtěte korelační koeficient $\mathsf{cor}\,(W, Z)$.
   (c) Určete střední hodnotu náhodné veličiny $U = \dfrac{\sin(\pi X)}{X + Y}$.
   (d)* Určete hustotu náhodné veličiny Z.
   Návod: Spočtěte nejdříve distribuční funkci $G(z)$ náhodné veličiny Z jako pravděpodobnost jevu $[X + Y \leq z]$. Vhodný obrázek pomůže.

3. V daný den přijde do školy X dívek a Y chlapců, kde X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametry $\lambda > 0$ a $\mu > 0$.
   (a) Určete rozdělení a očekávanou hodnotu celkového počtu žáků ve škole v daný den.
   (b) Jaké je rozdělení počtu dívek, jestliže víme, že je ve škole v daný den celkem n žáků?

4. Nechť $I_1, \ldots, I_n$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s alternativním rozdělení, tj.
$$\mathsf{P}(I_i = 1) = p, \qquad \mathsf{P}(I_i = 0) = 1 - p.$$
   Označme $X = \sum_{i=1}^{n} I_i$. Jaké má náhodná veličina X rozdělení? Pomocí vzorců (A1) a (A2) z „Opakování…“ spočítejte její střední hodnotu a rozptyl.

5. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, které splňují:
$$\mathsf{P}(X = k) = (1 - p_1)^k p_1, \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad \mathsf{P}(Y = l) = (1 - p_2)^l p_2, \quad l = 0, 1, \ldots$$
   Určete rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$.

6. Najděte rozdělení hustotu součtu náhodných veličin X a Y, jestliže tyto jsou nezávislé a $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{R}(0, \theta)$, Určete střední hodnotu a rozptyl $X + Y$.

7. Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $\mathsf{N}(0,\ 1)$. Určete rozdělení, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $Z = X + Y$.

8. Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 1]$. Najděte hustotu náhodné veličiny $Z = X\,Y$.

9. Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělení $\mathsf{Exp}(\lambda)$, Najděte hustotu náhodné veličiny $Z = \frac{X}{Y}$.

Opakování z přednášky

Rozdělení součtu náhodných veličin. Nechť má náhodný vektor $(X, Y)'$ sdružené spojité rozdělení s hustotou $f(x, y)$. Potom má náhodná veličina $Z = X + Y$ rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)\,\mathrm{d}x.$$

Speciálně, jsou-li X, Y **nezávislé** náhodné veličiny se spojitým rozdělením s hustotami f_X, f_Y, pak má veličina $Z = X + Y$ rozdělení s hustotou

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže X, Y jsou náhodné veličiny, které nabývají pouze nezáporných celočíselných hodnot, potom pro rozdělení náhodné veličiny $Z = X + Y$ platí

$$\mathsf{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(X = k, Y = n - k).$$

Jsou-li X, Y navíc **nezávislé**, pak platí

$$\mathsf{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(X = k)\,\mathsf{P}(Y = n - k).$$

Další (možná) užitečné informace. Jestliže $X_1, \ldots, X_n$ jsou náhodné veličiny a $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, pak platí (za předpokladu existence daných momentů)

- $\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathsf{E}\,X_i,$ (A1)
- $\mathsf{var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\,\mathsf{var}\,(X_i) + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j\,\mathsf{cov}\,(X_i, X_j)$ (A2).

Rozdělení součinu a podílu. Nechť X, Y jsou **nezávislé** veličiny s hustotami f_X, f_Y. Pak
(a) veličina $V = XY$ má rozdělení s hustotou

$$g(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{v}{x}\right) f_Y(x)\,\frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x,$$

(b) je-li $f_Y(y) = 0$ pro $y < 0$, má veličina $W = \dfrac{X}{Y}$ rozdělení s hustotou

$$h(w) = \int_{0}^{\infty} x f_X(wx) f_Y(x)\,\mathrm{d}x.$$

Výsledky

1.(a) $\mathsf{E}\,Z = 2/\lambda$, $\mathsf{var}\,(Z) = 2/\lambda^2$, hustota Z: $g(z) = \lambda^2 z \mathrm{e}^{-\lambda z}$, $z > 0$, a $g(z) = 0$ jinak,

(b) $\mathsf{E}\,Z = 1$, $\mathsf{var}\,(Z) = 1/6$, hustota Z:

$$g(z) = \begin{cases} z & z \in (0,1), \\ 2 - z & z \in (1,2), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

2.(a) $\mathsf{E}\,W = 0$, $\mathsf{var}\,(W) = 1/6$, $\mathsf{E}\,Z = 7/6$, $\mathsf{var}\,(Z) = 5/36$,

(b) $\mathsf{cor}\,(W, Z) = 0$,

(c) $\mathsf{E}\,U = \frac{2}{\pi}$,

(d) hustota Z:

$$g(z) = \begin{cases} z^2 & z \in (0,1), \\ z(2 - z) & z \in (1,2), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

3.(a) $Z = X + Y$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda + \mu$, $\mathsf{E}\,Z = \lambda + \mu$,

(b) rozdělení počtu dívek X za podmínky $Z = n$ je binomické s parametry n a $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

4. X má binomické rozdělení. $\mathsf{E}\,X = np$, $\mathsf{var}\,(X) = np(1-p)$.

5.

$$\mathsf{P}(Z = n) = p_1\, p_2\, \frac{(1-p_2)^{n+1} - (1-p_1)^{n+1}}{p_1 - p_2}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

pro $p_1 \neq p_2$ a

$$\mathsf{P}(Z = n) = (n+1)\, p^2\, (1-p)^n, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

pro $p_1 = p_2\, (= p)$.

6. Hustota náhodné veličiny $Z = X + Y$:

$$g(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0, \\ \frac{1}{\theta}(1 - e^{-\lambda z}) & z \in (0, \theta], \\ \frac{e^{-\lambda z}}{\theta}(e^{\lambda\theta} - 1) & z \in (\theta, \infty), \end{cases}$$

$\mathsf{E}\,Z = \frac{1}{\lambda} + \frac{\theta}{2}$, $\mathsf{var}\,Z = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\theta^2}{12}$.

7. Náhodná veličina Z má normální rozdělení $\mathsf{N}(0, 2)$, $\mathsf{E}\,Z = 0$, $\mathsf{var}\,(Z) = 2$.

8. Hustota náhodné veličiny Z (např. věta o rozdělení součinu):

$$h(z) = \begin{cases} -\ln(z) & z \in (0,1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

9. Hustota náhodné veličiny Z (např. věta o rozdělení podílu):

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{(1+z)^2} & z > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$