Vzorce k zápočtové písemce

Pravděpodobnost

- Princip inkluze a exkluze:
  $\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mathsf{P}(A_i) - \sum\sum_{i<j} \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1}\mathsf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap \ A_n)$.
- Náhodné jevy $A_1, \dots A_n$ jsou nezávislé, jestliže pro každé $r \leq n$ a každou $\{i_1, \dots, i_r\}$ podmnožinu $\{1, \dots, n\}$ platí $\mathsf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \mathsf{P}(A_{i_r})$.
- Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$ a $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots$. Pak

  (Věta o úplné pravděpodobnosti:) $\mathsf{P}(A) = \sum_i \mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i)$.

  (Bayesova věta:) Je-li $\mathsf{P}(A) > 0$, pak $\mathsf{P}(B_i|A) = \dfrac{\mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i)}{\sum_j \mathsf{P}(A|B_j)\mathsf{P}(B_j)}$.

Náhodná veličina:

- Distribuční funkce $F(x) = \mathsf{P}(X \leq x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.
- Střední hodnota

$$\mathsf{E}X = \begin{cases} \sum_k x_k p_k & \text{pro diskrétní } X, \\ \int x f(x) dx & \text{pro spojitou } X. \end{cases}$$

- Rozptyl $\mathsf{Var}\, X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2 = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$.
- Momentová vytvořující funkce $\psi(t) = \mathsf{E}e^{tX}$, platí $\mathsf{E}X = \psi'(0)$, $\quad \mathsf{Var}\, X = \psi''(0) - (\psi'(0))^2$.
- Střední hodnota veličiny $Y = h(X)$

$$\mathsf{E}h(X) = \begin{cases} \sum_k h(x_k) p_k & \text{pro diskrétní } X, \\ \int h(x) f(x) dx & \text{pro spojitou } X. \end{cases}$$

- Kvantilová funkce $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$ pro $u \in (0, 1)$.
- Medián je hodnota $\hat{x}$, pro kterou $\mathsf{P}(X \leq \hat{x}) = \mathsf{P}(X \geq \hat{x}) = 1/2$.

Náhodné vektory:

- Kovariance $\mathsf{Cov}\,(X, Y) = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)(Y - \mathsf{E}Y) = \mathsf{E}(XY) - (\mathsf{E}X)(\mathsf{E}Y)$.
- Korelační koeficient $\rho_{XY} = \dfrac{\mathsf{Cov}\,(X, Y)}{\sqrt{\mathsf{Var}\, X}\sqrt{\mathsf{Var}\, Y}}$.
- Marginální rozdělení:

  Pro diskrétní rozdělení: $\mathsf{P}(X = x_i) = \sum_j \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j)$.

  Pro spojité rozdělení $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$.
- Veličiny X, Y jsou nezávislé, jestliže

  pro spojité: $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ pro s.v. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

  pro diskrétní: $\mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathsf{P}(X = x_i)\mathsf{P}(Y = y_j)$ pro všechna x_i, y_j.
- Jestliže $X_1, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, pak

  $\mathsf{E}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathsf{E}X_i$,

  $\mathsf{Var}\,(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathsf{Var}\, X + \sum\sum_{i \neq j} a_i a_j \mathsf{Cov}\,(X_i, X_j)$.
- Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny, $Z = X + Y$, pak

  pro diskrétní: $\mathsf{P}(Z = k) = \sum_j \mathsf{P}(X = j)\mathsf{P}(Y = k - j)$.

  pro spojité: $g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$.

Čebyševova nerovnost: Je-li X náhodná veličina, pro kterou $0 < \mathsf{Var}\, X < \infty$, pak

$$\mathsf{P}(|X - \mathsf{E}X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{Var}\, X}{\varepsilon^2} \quad \text{pro všechna } \varepsilon > 0.$$

Centrální limitní věta (CLV): Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s $0 < \mathsf{Var}\, X_1 < \infty$. Pak

$$\mathsf{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathsf{E}X_1}{\sqrt{n\,\mathsf{Var}\, X_1}} \leq x\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

neboli ekvivalentně

$$\mathsf{P}\left(\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_n - \mathsf{E}X_1}{\sqrt{\mathsf{Var}\, X_1}} \leq x\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde Φ je distribuční funkci normálního rozdělení $\mathsf{N}(0, 1)$

Tabulka distribuční funkce a kvantilové funkce $\mathsf{N}(0, 1)$

x	0.000	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300	0.350	0.400	0.450
$\Phi(x)$	0.500	0.520	0.540	0.560	0.579	0.599	0.618	0.637	0.655	0.674
x	0.500	0.550	0.600	0.650	0.700	0.750	0.800	0.850	0.900	0.950
$\Phi(x)$	0.691	0.709	0.726	0.742	0.758	0.773	0.788	0.802	0.816	0.829
x	1.000	1.050	1.100	1.150	1.200	1.250	1.300	1.350	1.400	1.450
$\Phi(x)$	0.841	0.853	0.864	0.875	0.885	0.894	0.903	0.911	0.919	0.926
x	1.500	1.550	1.600	1.650	1.700	1.750	1.800	1.850	1.900	1.950
$\Phi(x)$	0.933	0.939	0.945	0.951	0.955	0.960	0.964	0.968	0.971	0.974
x	2.000	2.050	2.100	2.150	2.200	2.250	2.300	2.350	2.400	2.450
$\Phi(x)$	0.977	0.980	0.982	0.984	0.986	0.988	0.989	0.991	0.992	0.993
x	2.500	2.550	2.600	2.650	2.700	2.750	2.800	2.850	2.900	2.950
$\Phi(x)$	0.994	0.995	0.995	0.996	0.997	0.997	0.997	0.998	0.998	0.998

α	0.5	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
q_α	0	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Platí
- $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$,
- $q_\alpha = -q_{1-\alpha}$