Vlastnosti pravděpodobnosti

8. – 12. 10. 2012

Geometrická pravděpodobnost

1. Přátelé Igor a Dano si domluví schůzku mezi 9.00 a 10.00. Jejich příchody na dané místo jsou náhodné v rámci smluveného časového intervalu. Každý bude čekat 10 minut a pak odchází, nejpozději však v 10.00. Jaká je pravděpodobnost, že se jim podaří setkat se?

Nezávislost, podmíněná pravděpodobnost

2. Nechť A, B jsou neslučitelné jevy. Mohou být tyto dva jevy nezávislé?

3. Pravděpodobnost, že ve vlaku není místo k sezení, je 0.2, a pravděpodobnost, že vlak přijede pozdě, je 0.3. Pravděpodobnost, že vlak přijede pozdě nebo v něm není místo k sezení je 0.4.
   (a) S jakou pravděpodobností vlak přijede na čas, ale nebudete si v něm moci sednout?
   (b) S jakou pravděpodobností si budete moci ve vlaku sednout, jestliže přijel pozdě?
   (c) Jsou jevy [vlak přijede včas] a [ve vlaku bude místo k sezení] nezávislé?

4. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy A=[na modré kostce padlo sudé číslo], B =[na zelené kostce padlo liché číslo], C =[součet čísel je lichý]. Jsou náhodné jevy A,B,C po dvou nezávislé? Jsou jevy A,B,C nezávislé?

Věta o úplné pravděpodobnosti

5. Mezi 100 krabicemi mandarinek ze Španělska je 5 krabic se shnilými, stejně jako mezi 200 krabicemi z Řecka. Nejdříve vybereme náhodně jednu ze zásilek a potom ze zásilky náhodně vybereme krabici. Určete s jakou pravděpodobností obsahuje vybraná krabice shnilé mandarinky.

6. Přenášíme binární soubor, který obsahuje znaky "0" a "1". Pravděpodobnost, že se při přenosu zkreslí "0" je 1/4 a pravděpodobnost, že se zkreslí "1" je 1/6. Je známo, že přenášené znaky "0" a "1" se vyskytují v poměru 4:3. S jakou pravděpodobností se posloupnost o 6 znacích při přenosu nezkreslí, jestliže jednotlivé znaky se zkreslují nezávisle?

7. *(Polyovo urnové schéma)* Krabice obsahuje a černých a b bílých koulí. Student náhodně vytáhne jednu kouli, poznačí si její barvu a vrátí ji zpět společně s d koulí téže barvy.
   (a) Jaká je pravděpodobnost vytažení bílé koule v prvním a druhém tahu?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že v $n+1$-tém tahu vytáhneme bílou kouli?

Opakování

Geometrická pravděpodobnost:

- stavový prostor Ω ztotožníme s určitým geometrickým útvarem
- body v něm ležící odpovídají elementárním jevům majícím stejnou váhu
- náhodné jevy odpovídají jeho (pěkným) podmnožinám
- pravděpodobnost náhodného jevu A definujeme jako podíl ploch (objemů, ...):

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Nechť A, B jsou náhodné jevy, $\mathsf{P}(B) > 0$. **Podmíněnou pravděpodobnost** jevu A za podmínky B definujeme jako

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Nezávislost. Náhodné jevy A, B se nazývají nezávislé, jestliže platí

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B).$$

Náhodné jevy $A_1, \dots A_n$ jsou nezávislé, jestliže pro každé $r \le n$ a každou $\{i_1, \dots, i_r\}$ podmnožinu $\{1, \dots, n\}$ platí

$$\mathsf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = \mathsf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \mathsf{P}(A_{i_r}).$$

(Tj. součinovou podmínku musíme ověřit pro všechny dvojice, všechny trojice ... atd.)

Věta o úplné pravděpodobnosti:
Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \ne j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$ a $\mathsf{P}(B_i) > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots$. Pak

$$\mathsf{P}(A) = \sum_i \mathsf{P}(A \cap B_i) = \sum_i \mathsf{P}(A|B_i)\mathsf{P}(B_i).$$