

BODOVÝ ODHAD

11. CVIČENÍ

-
1. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.
- (a) Najděte $\hat{\lambda}_n$ odhad λ momentovou metodou.
 - (b) Zjistěte, zda je odhad $\hat{\lambda}_n$ nestranný.
 - (c) Zjistěte, zda je odhad $\hat{\lambda}_n$ konzistentní.
 - (d) Nalezněte $\tilde{\lambda}_n$ odhad λ metodou maximální věrohodnosti.
 - (e) Uvažujte odhad $T_n = (X_1 + X_2)/2$. Je tento odhad nestranný a konzistentní?
 - (f) Uvažujte odhad $U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n X_i$. Je tento odhad nestranný a konzistentní?
2. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z normálního rozdělení, tj. z hustoty

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde oba parametry μ i σ^2 jsou neznámé. Najděte maximálně věrohodný odhad obou parametrů (současně).

OPAKOVÁNÍ Z PŘEDNÁŠKY

TEORIE ODHADU:

- Veličiny X_1, \dots, X_n tvoří **náhodný výběr**, jestliže jsou nezávislé a mají všechny stejné rozdělení. Chceme-li specifikovat jejich rozdělení, mluvíme o náhodném výběru z rozdělení F (např. náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, náhodný výběr z $\text{Alt}(p)$ atd.)
- Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení, které závisí na **neznámém** parametru $\theta \in \Theta$. **Odhadem** θ je libovolná (měřitelná) funkce náhodného výběru X_1, \dots, X_n , jejíž funkční předpis nezávisí na θ .
Odhad $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ je tedy **náhodná veličina**.

VLASTNOSTI ODHADŮ.

- V praxi pracujeme pouze s odhady, které mají „pěkné“ vlastnosti.
- Řekneme, že odhad $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ je **nestranný** odhad θ , jestliže

$$\mathbf{E}T_n = \mathbf{E}_\theta T_n = \theta, \quad \text{pro všechna } \theta \in \Theta.$$

- Řekneme, že odhad $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ je **konzistentní** odhad θ , jestliže $T_n \rightarrow \theta$ v pravděpodobnosti pro $n \rightarrow \infty$ pro všechna $\theta \in \Theta$, tedy $\mathbf{P}(|T_n - \theta| > \epsilon) \rightarrow 0$ pro všechna $\epsilon > 0$ a $\theta \in \Theta$.

KONSTRUKCE BODOVÝCH ODHADŮ

- Metoda maximální věrohodnosti (MLE): Hledáme

$$\operatorname{argmax}_\theta \prod_{i=1}^n f(X_i, \theta) = \operatorname{argmax}_\theta \sum_{i=1}^n \log f(X_i, \theta),$$

kde $f(x, \theta)$ je „hustota“ veličin X (hustota pro spojité rozdělení a $f(x, \theta) = \mathbf{P}(X = x)$ pro diskrétní rozdělení).

- Momentová metoda: Za odhad θ vezmeme $\hat{\theta}$, pro které

$$\mathbf{E}_{\hat{\theta}} X^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k.$$

- Odhadovacích metod existuje ještě mnohem více (metoda nejmenších čtverců v regresi, ...).