Diskrétní náhodná veličina

4. cvičení

1. Z deseti milionu pixelů jsou v průměru dva vadné. Jaká je pravděpodobnost, že na obrazovce, která má $1280 \cdot 1024$ pixelů, bude alespoň jeden vadný pixel?

2. Vendelín má na svazku 8 klíčů a snaží se odemknout dveře (ke kterým pasuje právě jeden klíč). Náhodně vybere klíč a vyzkouší ho. Po každém neúspěšném pokusu mu klíče spadnou na zem a další klíč znovu volí náhodně. Tak pokračuje, dokud konečně dveře neotevře.
   (a) Jaké je rozdělení počtu všech neúspěšných Vendelínových pokusů?
   (b) Jaká je pravděpodobnost, že Vendelín zaznamená nejvýše 6 neúspěšných pokusů?
   (c) Jaká je pravděpodobnost, že neodejde dříve než po desátém neúspěšném pokusu, má-li za sebou již šest neúspěšných?
   (d) Jaký je očekávaný počet neúspěšných pokusů?

3. Veličina X určuje počet příchozích hovorů na policejní stanici za jednu hodinu. Lze předpokládat, že na stanici přijde právě k hovorů s pravděpodobností $\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots,$ kde $\lambda > 0$.
   (a) Ověřte, že se jedná o pravděpodobností rozdělení. Jak se toto rozdělení nazývá?
   (b) Určete očekávaný počet příchozích hovorů za jednu hodinu. (Výpočet proveďte z definice.)
   (c) Vypočítejte $\mathsf{E}X$ a rozptyl $\mathsf{Var}\,X$ pomocí momentové vytvořující funkce.

4. Uvažujme loterii, ve které je každý stírací los výherní s pravděpodobností p a nevýherní s pravděpodobností $1 - p$, kde $p \in (0, 1)$. Předpokládejme, že jsme se rozhodli kupovat losy, dokud nevyhrajeme (a pak už žádné další nekoupíme).
   (a) Určete rozdělení a očekávaný počet zakoupených nevýherních losů.
   (b) Předpokládejme, že výhra v dané loterii je 100 000 Kč a jeden los stojí 100 Kč. Jaké musí být alespoň p, aby se nám celá naše strategie vyplatila?

5. Diskrétní náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $1, 2, \ldots, n$, a to s pravděpodobnostmi $\mathsf{P}(X = k) = c \cdot k\ k = 1, \ldots, n$. Určete konstantu $c > 0$ tak, aby se jednalo o pravděpodobnostní rozdělení, a střední hodnotu $\mathsf{E}X$.

Opakování

Diskrétní náhodná veličina:

Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha hodnot $x_1, x_2, \ldots$, říkáme, že má diskrétní rozdělení.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = \mathsf{P}(X = x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
- **Distribuční funkce** je po částech konstantní, zprava spojitá, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k. To odpovídá definici $F(x) = \mathsf{P}(X \leq x)$.
- **Střední hodnota** X se spočítá jako

$$\mathsf{E}X = \sum_k x_k \mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k x_k p_k \quad \text{(existuje-li).}$$

- **Rozptyl** X se spočítá jako

$$\mathsf{Var}\,X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2 = \sum_k x_k^2 p_k - \left(\sum_k x_k p_k\right)^2 \quad \text{(existuje-li).}$$

- Střední hodnota náhodné veličiny $Y = h(X)$ se spočítá jako

$$\mathsf{E}Y = \mathsf{E}h(X) = \sum_k h(x_k)\mathsf{P}(X = x_k) = \sum_k h(x_k) p_k \quad \text{(existuje-li),}$$

  nebo přímo z rozdělení Y jako $\mathsf{E}Y = \sum_y y\mathsf{P}(Y = y)$.

Užitečné vlastnosti

- **Momentová vytvořující funkce** veličiny X je funkce reálné proměnné $t \in \mathbb{R}$ definovaná jako $\psi(t) = \mathsf{E}e^{tX}$ (existuje-li). Platí

$$\mathsf{E}X = \psi'(0), \quad \mathsf{E}X^2 = \psi''(0), \quad \mathsf{Var}\,X = \psi''(0) - (\psi'(0))^2.$$

- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X je náhodná veličina, pak platí

$$\mathsf{E}(a + bX) = a + b\mathsf{E}X, \quad \mathsf{Var}\,(a + bX) = b^2 \mathsf{Var}\,X.$$

- Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a X, Y jsou náhodné veličiny, pak platí

$$\mathsf{E}(aX + bY) = a\mathsf{E}X + b\mathsf{E}Y.$$