NMFM310, téma 4: markovské řetězce, sada 1

Příklad 1: Ukažte, že každá posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, které nabývají jen spočetně mnoha hodnot je homogenní markovský řetězec. Jaká je jeho matice pravděpodobností přechodu?

Příklad 2: Počasí v Montrealu je buď pěkné, nebo neutrální nebo špatné. Jestliže je dnes pěkně, zítra bude pěkně s pravděpodobností 0.6, neutrálně s pravděpodobností 0.2 a špatně s pravděpodobností 0.2. Jestliže je počasí neutrální, zítra bude pěkně, neutrálně nebo špatně s pravděpodobnostmi 0.25, 0.5 a 0.25. Pro dnes špatné počasí pak s pravděpodobnostmi 0.25 a 0.5 bude zítra neutrálně nebo špatně. Popište situaci jako Markovův řetězec.

Příklad 3: Buď $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}, X_0 = 0$ posloupnost výsledků opakovaných hodů spravedlivou kostkou a definujme následující náhodné veličiny:
a) $Y_n = \max(X_0, \ldots, X_n)$ největší pozorovaná hodnota během prvních n hodů,
b) N_n = počet šestek, které padly během prvních n hodů,
c) C_n = počet hodů, které se uskutečnily do času n od poslední pozorované šestky.
Všechny posloupnosti $\{Y_n\}$, $\{N_n\}$ i $\{C_n\}$ jsou markovské řetězce. Určete jejich matici pravděpodobností přechodu.
Určete, jak vypadají pravděpodobnosti $p_{i,3}^{(2)}$, $i \in S$.
Určete, jak vypadají pravděpodobnosti $p_{i,j}^{(n)}$, $i, j \in S, n \in \mathbb{N}$ pro případy a) a b).
Klasifikujte stavy řetězce pro případy a) a b).

Příklad 4: Aleš a Barbora hrají sérii šachových partií. Předpokládejme, že každá partie skončí s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ výhrou Aleše, s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ remízou, a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ výhrou Barbory. Za výhru se získává jeden bod, za remízu půl bodu.Označme X_n absolutní hodnotu rozdílu získaných bodů obou hráčů po n partiích.

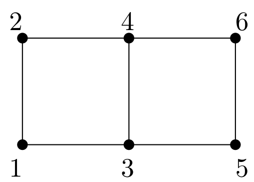
Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Příklad 5: Nechť homogenní Markovův řetězec má matici pravděpodobností přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Předpokládejme, že počáteční rozdělení řetězce bylo rovnoměrné. Jaké je rozdělení v čase $n = 3$?
b) Klasifikujte stavy řetězce.

Příklad 6: Uvažujme objekt, který se pohybuje po plánu znázorněném na obrázku. Pohyby jsou pouze mezi šesti význačnými body.V každém kroku si objekt vybere jeden ze čtyř směrů (sever, východ, jih západ – každý se stejnou pravděpodobností) a tímto směrem se vydá. Určeným směrem se pohybuje až tam, kam je to možné. Pokud v daném směru nevede cesta, zůstává na místě. Označme X_n polohu částice po n krocích.
a) Určete matici pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}$ Markovova řetězce X_n.
b) Určete rozdělení řetězce v časech $n = 1, 2, 3$, pokud $X_0 = 1$.
c) Určete rozdělení řetězce v časech $n = 1, 2$, pokud $X_0 = 3$.
d) Klasifikujte stavy řetězce.



Příklad 7: Simulování Markovova řetězce

Máme dáno počáteční rozdělení $(p_i)_{i \in S}$ a matici pravděpodobností přechodu P Markovova řetězce $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a chceme simulovat náhodnou realizaci tohoto řetězce $\{X_n\}$. K tomu máme ještě k dispozici posloupnost náhodných čísel $U_0, U_1, U_2, \ldots,$ které jsou nezávislé, stejně rozdělené a mají rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$. Jedna možnost postupu je následující:

Zadefinujeme si (nenáhodné) zobrazení $\Psi : [0, 1] \to S$ tak, aby pro každý stav $i \in S$ platilo

$$\int_0^1 I(\Psi(x) = i) \,\mathrm{d}x = p_i,$$

a zobrazení $\Phi : S \times [0, 1] \to S$ tak, aby platilo

$$\int_0^1 I(\Phi(i, x) = j) \,\mathrm{d}x = p_{ij},$$

pro každou dvojici stavů $i, j \in S$. Potom definujeme naši náhodnou realizaci řetězce $\{X_n\}$ takto:

$$X_0 = \Psi(U_0), \qquad X_{n+1} = \Phi(X_n, U_n) \ \text{ pro } \ n \geq 1.$$

a) Ukažte, že takto generovaný řetězec $\{X_n\}$ má skutečně požadované rozdělení.
b) Navrhněte vhodné funkce Ψ a Φ.

Domácí úloha

a) Aleš a Barbora hrají v kostky (každý vyhraje danou partii s pravděpodobností $\frac{1}{2}$) a začínají oba s deseti mincemi. V každé partii ten, kdo prohraje, dá svému soupeři jednu minci. Buď X_n počet mincí, které vlastní Aleš v čase n, $n \in \mathbb{N}$. Pokud je jeden hráč ruinován, stav X_n zůstane zafixován a už se pro další n nemění. Buď $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ náš markovský řetězec, přičemž pokládáme $X_0 = 10$.

Klasifikujte stavy řetězce $\{X_n\}$ a simulujte několik jeho průběhů (např. 20 průběhů, délku volte podle potřeby – skončete ve chvíli, kdy už se neděje nic zajímavého). Nakreslete graf se všemi průběhy a graf, který ukáže, jak se vyvíjejí četnosti

$$\hat{p}_i(t) = (\text{počet realizací řetězce ve stavu i v čase t})/(\text{počet všech simulovaných realizací}),$$

například pro časy $t = 0, 5, 10, 15, 20, 25$.

Spočtěte také, jaké jsou teoretické absolutní pravděpodobnosti $\mathbf{p}(t)$ (k tomu budete samozřejmě potřebovat určit počáteční rozdělení $\mathbf{p}(0)$ a matici pravděpodobností přechodu P - a použít software, který umí násobit matice).

b) Simulujte markovský řetězec z příkladu 4. Nasimulujte několik trajektorií (řekněme 10) délky 100, vycházející z počátečního stavu 0 a stejný počet vycházející z počátečního stavu 20. Vytvořte grafy s průběhem těchto trajektorií a spočtěte relativní četnosti jednotlivých stavů (tj. počet časových okamžiků, v nichž byl řetězec ve stavu $i \in S$ dělený délkou pozorovaného řetězce – **pozor**, význam těchto četností je jiný než v případě a). Jak moc se tyto pozorované četnosti liší pro jednotlivé průběhy?

Jak se změní situace, když bude Aleš vyhrávat s pravděpodobností 0.5, remíza nastane s pravděpodobností 0.25 a Barbora vyhraje s pravděpodobností 0.25?

Nakreslete graf průběhů všech trajektorií a graf s relativními četnostmi.

Řešení by v obou případech a), b) mělo obsahovat popis, jak jste realizace řetězce generovali.