3 Teorie lineární regulace

V této kapitole se budeme zabývat modelem, kde máme soustavu (černou skříňku), která převádí vstupní posloupnost $(u_0, u_1, \ldots)$ na výstupní posloupnost $(y_0, y_1, \ldots)$ na základě následujícího lineárního modelu regulace:

$$y_t = \sum_{k=0}^{t} h_k u_{t-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k u_{t-k}. \tag{13}$$

Abychom mohli mít $t \in \mathbf{Z}$, položíme $u_{-i} = 0 = y_{-i}$ pro $i \geq 1$. Interpretace: soustava je před časem 0 v klidu.

Na posloupnost (u_n) se budeme dívat jako na posloupnost odchylek vstupů od jakési rovnovážné polohy a podobně na výstupní posloupnost (y_n) se budeme dívat jako na posloupnost odchylek výstupu od určité hodnoty.

Definice 2 *Vstupní posloupnost (u_n) ve tvaru*

$$u_0 = 1, \quad 0 = u_1 = u_2 = \ldots$$

budeme nazývat jednotkovým impulsem. Odezvou systému na tento vstup je

$$y_0 = h_0 u_0 = h_0, \quad y_1 = h_0 u_1 + h_1 u_0 = h_1, \quad \ldots, \quad y_k = h_0 u_k + \ldots + h_k u_0 = h_k, \quad \ldots$$

Výstupní posloupnost je tedy tvaru $(h_0, h_1, \ldots)$. Této posloupnost budeme říkat impulsní charakteristika soustavy.

Definice 3 *Vstupní posloupnost (u_n) ve tvaru*

$$1 = u_0 = u_1 = \ldots$$

nazveme jednotkovým skokem (v čase 0 se změní vstup z 0 na 1). Odezvě soustavy na tento skok

$$y_t = \sum_{k=0}^{t} h_k u_{t-k} = \sum_{k=0}^{t} h_k = g_t$$

budeme říkat přechodová charakteristika soustavy.

K analýze soustav se nám bude hodit metoda vytvořujících funkcí pro číselné posloupnosti, speciálně tzv. z-transformace.

Definice 4 *Je-li $(a_k, k \in \mathbb{N}_0)$ posloupnost reálných čísel, definujeme její z-transformaci jako*

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}.$$

Tato řada konverguje pro $|z| > z_0$ a diverguje pro $|z| < z_0$ pro nějaké $z_0 \in [0, \infty]$.

Pro posloupnost vstupů (u_n), výstupů (y_n) a pro impulsní charakteristiku (h_k) definujeme $U(z), Y(z)$ a $H(z)$ jako příslušné z-transformace.

Definice 5 *Funkci $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}$ budeme nazývat (impulsní) přenosovou funkcí soustavy.*

Proč se $H(z)$ nazývá přenosovou funkcí soustavy? Platí totiž:

$$Y(z) = \sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k u_{t-k} \right) z^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k} \sum_{l=0}^{\infty} u_l z^{-l} = H(z)U(z)$$

pro taková z, že $H(z)$ a $U(z)$ absolutně konvergují, neboť $\ldots = u_{-2} = u_{-1} = 0$.

3.1 Stavový model

Příklad – bakaláři.

Pro potřeby stavového modelu zavedeme posloupnost $(x_t \in \mathbb{R}^r, t \in \mathbb{N}_0)$ stavů systému. x_t je tedy obecně r-rozměrný vektor. Stav systému v čase 0 definujeme hodnotou $x_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^r$. Stavy systému v dalších okamžicích popíšeme pomocí lineárního modelu

$$x_{t+1} = a x_t + b u_t, \quad \text{kde } a \in \mathbb{R}^{r \times r}, b \in \mathbb{R}^{r \times 1}.$$

Výstup systému pak budeme uvažovat ve tvaru

$$y_t = c x_t + d u_t, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R}^{1 \times r}, d \in \mathbb{R}^{1 \times 1}.$$

V obou případech je (u_t) posloupnost vstupů. Stavy systému (x_t) nepozorujeme přímo, pozorujeme pouze posloupnost výstupů (y_t).

Jak získáme ze stavového modelu přímou závislost výstupní posloupnosti na vstupní ve tvaru (13)? Vynásobením obou rovností faktorem z^{-t} a sečtením přes $t \in \mathbb{N}_0$ dojdeme k rovnostem

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} x_{t+1} z^{-t} &= a \sum_{t=0}^{\infty} x_t z^{-t} + b \sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}, \\ \sum_{t=0}^{\infty} y_t z^{-t} &= c \sum_{t=0}^{\infty} x_t z^{-t} + d \sum_{t=0}^{\infty} u_t z^{-t}. \end{aligned}$$

Tyto rovnosti lze zapsat pomocí z-transformace $X(z) = \sum_{t=0}^{\infty} x_t z^{-t}$:

$$\begin{aligned} zX(z) &= aX(z) + bU(z), \\ Y(z) &= cX(z) + dU(z). \end{aligned}$$

Řešením těchto rovnic docházíme k rovnostem

$$\begin{aligned} X(z) &= (zI - a)^{-1} b U(z), \\ Y(z) &= cX(z) + dU(z) = [c(zI - a)^{-1} b + d] U(z), \end{aligned}$$

kde $I \in \mathbb{R}^{r \times r}$ je r-rozměrná jednotková matice, a tedy $H(z) = [c(zI - a)^{-1} b + d]$. Tuto rovnost můžeme dále upravit:

$$\begin{aligned} H(z) = [c(zI - a)^{-1} b + d] &= \frac{c \cdot \operatorname{adj}(zI - a) \cdot b + d \cdot \det(zI - a)}{\det(zI - a)} \qquad (14) \\ &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{n_0 z^r + \ldots + n_r}{d_0 z^r + \ldots + d_r} = \frac{n_0 + \ldots + n_r z^{-r}}{d_0 + \ldots + d_r z^{-r}} = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})}, \end{aligned}$$

kde adj značí adjungovanou matici a $N(z)$ a $D(z)$ jsou z-transformace odpovídající polynomům $n(z^{-1})$ a $d(z^{-1})$.

3.2 Obecný model

Opět budeme předpokládat, že $u_{-i} = 0 = y_{-i}$ pro $i \in \mathbb{N}$. Dále budeme předpokládat, že výstup systému y_t v čase t je dán následující rovnicí:

$$d_0 y_t + \ldots + d_r y_{t-r} = n_0 u_t + \ldots + n_r u_{t-r}, \quad \text{kde } d_0 \neq 0, \tag{15}$$

a budeme chtít opět najít vyjádření ve tvaru (13).

Vynásobením rovnosti (15) hodnotou z^{-t} a sečtením přes $t \in \mathbb{N}_0$ obdržíme rovnost

$$\sum_{t=0}^{\infty}(d_0 z^{-0} y_t z^{-t} + \ldots + d_r z^{-r} y_{t-r} z^{-(t-r)}) = \sum_{t=0}^{\infty}(n_0 z^{-0} u_t z^{-t} + \ldots + n_r z^{-r} u_{t-r} z^{-(t-r)}).$$

Využitím předpokladu $y_{-i} = 0 = u_{-i}$ pro $i \in \mathbb{N}$ docházíme k rovnosti

$$(d_0 z^0 + \ldots + d_r z^{-r}) \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = (n_0 z^0 + \ldots + n_r z^{-r}) \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k},$$

to jest

$$d(z^{-1}) Y(z) = n(z^{-1}) U(z),$$

kde

$$d(x) = d_0 x^0 + \ldots d_r x^r \quad \text{a} \quad n(x) = n_0 x^0 + \ldots n_r x^r.$$

Toto je speciálním případem lineárního modelu, ve kterém $y_t = \sum_{k=0}^{t} h_k u_{t-k}$. Proto i zde platí vztah

$$Y(z) = H(z) U(z) \text{ pro } z \text{ taková, že } U, H \text{ konvergují absolutně.}$$

Docházíme tak k rovnosti

$$d(z^{-1}) Y(z) = d(z^{-1}) H(z) U(z) = n(z^{-1}) U(z). \tag{16}$$

Tato rovnost platí pro každý vstup a z takové, že řady U, H konvergují absolutně.

Speciální volba vstupu $u_0 = 1$, $0 = u_1 = u_2 = \ldots$ odpovídající jednotkovému impulsu má z-transformaci ve tvaru $U(z) \equiv 1$. Dosazením této funkce do (16) přicházíme k rovnosti

$$d(z^{-1}) H(z) = n(z^{-1}),$$

tedy

$$H(z) = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})} = \frac{n_0 + \ldots + n_r z^{-r}}{d_0 + \ldots + d_r z^{-r}}.$$

Poznámka: Rovnice $d_0 y_t + \ldots + d_r y_{t-r} = n_0 u_t + \ldots + n_r u_{t-r}$ se někdy zapisuje ve tvaru

$$(d_0 z^0 + \ldots + d_r z^{-r}) y_t = (n_0 z^0 + \ldots + n_r z^r) u_t, \text{ zkráceně } d(z^{-1}) y_t = n(z^{-1}) u_t,$$

přičemž z se v této souvislosti interpretuje jako operátor posunutí, tj, $z x_t = x_{t+1}$. Inverzní operátor $z^{-1} x_t = x_{t-1}$ se pak interpretuje jako operátor zpětného posunutí.

Příklad: Nechť pro výstup platí rovnice

$$y_{t+1} - a y_t = u_{t+1} \quad \text{resp.} \quad (1 - a z^{-1}) y_t = u_t.$$

Odtud

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

má pól v bodě $z = a$. Funkci H lze rozvinout následujícím způsobem:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k},$$

což odpovídá impulsní charakteristice $h_k = a^k$. □

3.3 Stabilita soustavy

Základní vlastností, která se u lineárních soustav zkoumá, je stabilita soustavy a vlastnosti se stabilitou související. Stabilita spočívá v tom, že soustava vychýlená z rovnovážného stavu (nulového stavu) se vrací zpátky do tohoto stavu.

Definice 6 *Řekneme, že soustava je stabilní, pokud* $\lim_{t\to\infty} h_t = 0$. *To znamená, že odezva na jednotkový impuls se s rostoucím časem vytrácí.*

Příklad - pokračování Je-li $h_k = a^k$, je soustava stabilní právě tehdy, když je $|a| < 1$. □

Stabilita soustavy závisí na pólech přenosové funkce H:

Věta 2 *Soustava odpovídající obecnému modelu s přenosovou funkcí ve tvaru*

$$H(z) = \frac{n(z^{-1})}{d(z^{-1})} = \frac{N(z)}{D(z)},$$

kde $N(z) = n_0 z^r + \ldots + n_r$ *a* $D(z) = d_0 z^r + \ldots + d_r$ *jsou nesoudělné polynomy, je stabilní právě tehdy, když se všechny kořeny polynomu* $D(z)$ *nacházejí uvnitř jednotkového kruhu v komplexní rovině.*

Důkaz: Dokážeme pouze jednu implikaci (z kořenů uvnitř jednotkového kruhu plyne stabilita), druhá je velmi obtížná a přesahuje rámec přednášky.

Podle základní věty algebry je možné polynom $D(z)$ rozložit na součin kořenových faktorů

$$D(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{m_k}, \quad \text{kde } m_1 + \ldots + m_k = r,$$

a kde $z_1, \ldots, z_k$ jsou kořeny polynomu $D(z)$ s násobnostmi $m_1, \ldots, m_k$. Na základě tohoto rozkladu jsme schopni racionální funkci H rozložit na součet konstanty a součet parciálních zlomků:

$$H(z) = h_0 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(z - z_i)^j} = h_0 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{z^j} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{t+j-1}{t} \left(\frac{z_i}{z}\right)^t.$$

Podílovým kritériem pak zjistíme, že tato mocninná řada (s argumentem z_i/z) konverguje absolutně pro $|z| = 1$. Stejným způsobem tedy konverguje i její součet $H(z) = \sum_{l=0}^{\infty} h_l z^{-l}$ pro $z = 1$. Nutnou podmínkou pro konvergenci řady $\sum_{l=0}^{\infty} h_l$ je ale podmínka $\lim_{l\to\infty} h_l = 0$, což je právě podmínka stability. □

Poznámka: Pro stavový model máme z rovnice (14), že $D(z) = \det(zI - a)$, a tedy kořeny $D(z)$ jsou právě všechna vlastní čísla matice a. Soustava je tedy stabilní právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice a jsou v absolutní hodnotě menší než 1.

Poznámka: Nechť je soustava stabilní a nechť vstupem je jednotkový skok. Pak

$$\lim_{t\to\infty} y_t = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{t} h_k u_{t-k} = \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{t} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = y_\infty.$$

Soustava se tedy v nekonečném horizontu ustálí na nové úrovni. To vyplývá z předchozí věty, neboť pokud impulsní charakteristika konverguje k nule (soustava je stabilní), činí tak geometricky rychle. Speciálně, v důkazu předcházející věty je ukázáno: pokud jsou kořeny $D(z)$ uvnitř jednotkového kruhu, pak řada $\sum_{l=0}^{\infty} h_l$ konverguje absolutně.