

# Věta o úplné pravděpodobnosti

**Definice:** Řekneme, že jevy  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$  tvoří *úplný systém jevů*, jestliže jsou po dvou disjunktní a  $\cup A_i = \Omega$ .

**Věta:** Necht'  $\{A_i\}$  je úplný systém jevů takový, že  $P(A_i) > 0$  pro každé  $i$ . Potom platí

$$P(B) = \sum_i P(B | A_i)P(A_i).$$

## Úloha 9.1

Mámě dvě osudí  $A$  a  $B$ . Osudí  $A$  obsahuje 8 bílých a 7 černých míčků, zatímco v osudí  $B$  jsou 4 bílé a 6 černých.

Nejprve náhodně vylosujeme osudí ( $A$  s pravděpodobností  $2/3$  a  $B$  s pravděpodobností  $1/3$ ), pak ze zvoleného osudí vybereme jeden míček.

Je pravděpodobnější, že je bílý nebo černý?

# Bayesova věta

**Věta:** Necht'  $\{A_i\}$  je úplný systém jevů takový, že  $P(A_i) > 0$  pro každé  $i$ . Jestliže je  $P(B) > 0$ , potom platí

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j)P(A_j)}{\sum_i P(B | A_i)P(A_i)}.$$

*Důkaz:* Platí

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j)P(A_j)}{P(B)}$$

a stačí využít větu o podmíněné pravděpodobnosti k vyjádření  $P(B)$  ve jmenovateli.

## Úloha 9.2 (lékařská diagnostika)

Dříve, než propukne nemoc  $D$ , lze její latentní přítomnost odhalit biologickým testem. U skrytě nemocné osoby je test pozitivní s pravděpodobností 0,999 (*senzitivita* testu). Oproti tomu u zdravé osoby je test negativní s pravděpodobností 0,99 (*specifita* testu). Zjištění tedy není jednoznačné, onemocnění nemusí odhaleno, nebo můžeme být vyvolán falešný poplach.

Předpokládáme, že sledovanou nemoc má 1% populace (*prevalence* nemoci). Jestliže u náhodně vybrané osoby dal test pozitivní výsledek, jaká je pravděpodobnost, že tato osoba má dané onemocnění?

## Úloha 9.3 (urna se vrací)

Deseti bílými či černými koulemi byla urna naplněna tak, že bylo desetkrát hozeno symetrickou mincí. Padl-li rub (líc) mince, byla do urny vložena bílá (černá) koule.

Takto náhodně naplněná urna je zkoumána pomocí pokusu, který spočívá v tom, že z urny je postupně taženo  $n$  koulí, každá z nich je však po zjištění barvy do urny vrácena.

Výsledkem pokusu je zjištění, že všech  $n$  tažených koulí má bílou barvu (jev  $B^{(n)}$ ).

Jaká je pravděpodobnost, že všechny koule v urně jsou bílé?

## Úloha 9.4 (předpověď počasí)

Marie se zítra vdává. Obřad proběhne na dovolené v Egyptě, ve stínu pyramid v Gíze. V této oblasti v posledních letech prší pouze 5 dní v roce. Bohužel na zítřek předpověď počasí hlásí déšť.

Zkušenost říká, že nastavší déšť bývá předpovězen v 90 % případů. Na druhou stranu, na dny bez deště hlásí předpověď (chybně) déšť v 10 % případů.

Jaká je pravděpodobnost, že v Mariin svatební den bude v daném místě pršet?