

## ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA Z NMAI059 (ŘÁDNÁ, PONDĚLÍ 16.12.2019)

**Příklad 1** (20 b.). Na farmě spolu žijí čtyři zvířátka. Prase jménem Napoleon, Osel jménem Benjamin, kůň Boxer a slepice, které majitel farmy zapomněl dát jméno. Prase Napoleon je mezi zvířátky samozvaným vůdcem a pokud se mu nějaké z ostatních zvířátek znelíbí, dokáže ho nechat přes noc záhadně zmizet. Všechna zvířátka jsou v očích Napoleona vnímána zcela **nezávisle**, Boxer se mu znelíbí s pravděpodobností  $1/3$ , Benjamin s pravděpodobností  $1/2$  a slepice s pravděpodobností  $2/3$ .

Začíná se stmívat, majitel farmy zkontroluje zvířátka, zjistí, že všechna jsou přítomna a jde spát. Označme náhodnou veličinu  $X$  udávající počet zvířátek, které majitel ráno nalezne na farmě.

- Určete rozdělení náhodné veličiny  $X$ , střední hodnotu a rozptyl.
- Majitel farmy se ráno rozhodl, že jedno zvířátko prodá na maso. Jde tedy ven a z přítomných zvířátek jedno zcela náhodně vybere. S jakou pravděpodobností vybral prase Napoleona?
- S jakou pravděpodobností zůstali na farmě Boxer, Benjamin i slepice, víme-li, že to ráno farmář skutečně na maso vybral Napoleona.

**Příklad 2** (30 b.). Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr ze spojitého rozdělení daného hustotou

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (2x + \theta) & \text{pro } x \in [0, \theta], \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

kde  $\theta \in (0, \infty)$  je neznámý parametr a  $c \in \mathbb{R}$  je konstanta (která může záviset na parametru  $\theta$ ).

- Určete konstantu  $c$ .
- Spočítejte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny  $X$ , která má hustotu  $f$ .
- Odvoďte distribuční funkci a hustotu náhodné veličiny  $Y = X^2$ .
- Odhadněte parametr  $\theta$  pomocí metody momentů. Je tento odhad nestranný a konzistentní?

**Příklad 3** (20 b.). Skupina Guns N' Roses vystoupí příští rok v O2 areně, všech 10 000 lístků už je beznadějně vyprodáno. Chcete si v den koncertu před vstupem do O2 areny otevřít stánek s pivem. Lze předpokládat, že každý návštěvník projde kolem vašeho stánku právě jednou a nezávisle na ostatních si s pravděpodobností  $1/3$  objedná malé pivo (0.3 l), s pravděpodobností  $1/5$  velké pivo (0.5 l) a s pravděpodobností  $7/15$  kolem vás projde a neobjedná si nic.

- S jakou pravděpodobností prodáte více než 2000 litrů piva?
- Kolik alespoň litrů piva musíte objednat od vašeho dodavatele, aby vám množství stačilo s pravděpodobností alespoň 0.9?

*Použijte vhodnou limitní větu. Nezapomeňte ověřit její předpoklady.*

**Příklad 4** (30 b.). Náhodný vektor  $(X, Y)$  má rozdělení dané sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 < y < 2x < 2, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

- Určete marginální rozdělení  $X$  a  $Y$ .
- Spočítejte korelační koeficient  $\text{corr}(X, Y)$ . Jsou náhodné veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé?
- Spočítejte  $\mathbb{P}(Y > X)$ .

Vybrané hodnoty distribuční a kvantilové funkce normovaného normálního rozdělení:

$x$	0.0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\Phi(x)$	0.5000	0.6915	0.8413	0.9332	0.9772	0.9938	0.9987
$x$	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
$\Phi^{-1}(x)$	-1.6449	-1.2816	0	1.2816	1.6449	1.96	2.3263