Mocniny, odmocniny, logaritmy, exponenciála

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

2021

Logaritmy

Předchůdce logaritmu

logaritmy — základní účel: zjednodušit pracné výpočty (násobení a dělení)

formule převádějící násobení na sčítání byly známy i dříve:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

Tycho Brahe (1546--1601) zaměstnával na svém ostrově Hven počtáře:
Paul Wittich – usnadňoval si výpočty výše uvedenou rovností

Logaritmy — v populární literatuře

John Napier z Merchistonu (1550--1617)
1. tabulky: *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Edinburgh, 1614)

$$NapLog\,(x) = \frac{\log \frac{10^7}{x}}{\log \frac{10^7}{10^7-1}}$$

Henry Briggs (1561--1630)
první tabulky dekadických logaritmů (14místné)
Logarithmorum chilias prima (1617)

$$\mathrm{Log}\,(ab) = \mathrm{Log}\,a + \mathrm{Log}\,b - \mathrm{Log}\,1$$

„aby vznikalo co nejméně problémů při výpočtech“, volí se $\mathrm{Log}\,1 = 0$

Dnešní definice:

$$\log_a x = y \qquad x = a^y$$

Logaritmy — počátek

John Napier (1550--1617):
Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1614)
Mirifici logarithmorum canonis constructio (1619)

Původní definice:
Logaritmus sinu je takové číslo, které velmi přesně určuje úsečku, která se zvětšovala lineárně, ve stejném čase úsečka příslušná celému sinu se zmenšovala geometricky až k zadanému sinu a každý pohyb je chápán synchronně a s týmiž počátečními rychlostmi.

Napier však při generování tabulek použil vztahu mezi aritmetickou a geometrickou posloupností. **Co jsou tedy Napierovy logaritmy?**

Oblasti využití: výpočty zejména při navigaci, také astronomické výpočty proto tabulka logaritmů hodnot sinu

Logaritmy — šíření po Evropě

logaritmy velmi praktické, objev se brzy rozšířil po Evropě:

Johannes Kepler (1571--1630)
Chiliades logarithmorum (1624)

Denis Henrion (1580--1640)
Traité des logarithmes (1626)

Adrian Vlacq (1600--1667)
Arithmetica logarithmica sive logarithmorum chiliades centum (1628)
(vylepšené Briggsovy tabulky)

Bonaventura Cavalieri (1598--1641)
Directorium generale uranometricum in quo trigonometriae logarithmicae fundamenta (1632)
(spis o aplikacích logaritmů)

Logaritmy — základní idea

John Napier (1550--1617)

Tabulka mocnin o základu 2:

1	2	5	32	9	512	13	8192
2	4	6	64	10	1024	14	16384
3	8	7	128	11	2048	15	32768
4	16	8	256	12	4096	16	65536

Např.: $16 \cdot 64 = 1024$
Pomocí tabulky: $4 + 6 = 10$, tj. 1024

Problém: tabulka je řídká.

větší základ by to ještě zhoršil: $5, 5^2 = 25, 5^3 = 125, 5^4 = 625, \ldots$

Řešení: základ blízký 1. Např. $1,001$ má celočíselné mocniny:
$1,001 \quad 1,002001 \quad 1,003003001 \quad 1,004\ldots \quad 1,005\ldots \quad 1,006\ldots$
$1,007\ldots \quad 1,008\ldots \quad 1,009\ldots \quad 1,010\ldots \quad 1,011\ldots \quad 1,012\ldots$

Logaritmy — základní idea

ilustrace: základ $1 - \frac{1}{10}$ (lépe je mít hodnoty v intervalu (0,1))

1	0,9	15	0,20589113209464907
2	0,81	16	0,18530201888518416
3	0,729	17	0,16677181699666577
4	0,6561	18	0,15009463529699918
5	0,59049	19	0,13508517176729928
6	0,531441	20	0,12157665459056935
7	0,4782969	21	0,10941898913151242
8	0,43046721	22	0,09847709021836118
9	0,387420489	23	0,08862938119652507
10	0,3486784401	24	0,07976644307687256
11	0,31381059609		...
12	0,282429536481		
13	0,2541865828329		
14	0,22876792454961		

Např.: $0,43 \cdot 0,282 = 0,12126$
pomocí tabulky:
$8 + 12 = 20$, tj. $0,121$

Logaritmus – název

z řeckých slov **logos** (poměr) a **arithmos** (přirozené číslo)

je-li dána aritmetická a geometrická posloupnost
logaritmy jsou **indexy poměrů** (členů geometrické posloupnosti)

Logaritmy — Napierův základ: $1 - 10^{-7}$

n	$(1-10^{-7})^n$
1	0,9999999
2	0,9999998 0000001
3	0,9999997 00000029999999
4	0,9999996 000000599999960000001
5	0,9999995 0000009999999000000049999999
	…
100	0,9999900 0004949983830039212…
	…
7 500 000	0,4723665 3502726813056629714…
	…
10 000 000	0,3678794 2277746949660786692…
	…
100 000 000	0,0000453 999070625241319530913…
100 000 001	0,0000453 999025225334257006781…

Logaritmy — Napierova tabulka (základ $1 - 10^{-7}$)

John Napier: *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*, Edinburgh, 1614.

$$10^7 \cdot (1 - 10^{-7})^n$$

Napier by musel stále násobit, to by však bylo velmi náročné.
Proto tyto mocniny nepočítá!

tzv. **První tabulka:**

$n = 1$ 9 999 999, 000 000 0
- 0,9 999 999 = 9 999 998, 000 000 1

$n = 2$ 9 999 998, 000 000 1
- 0,9 999 998 = 9 999 997, 000 000 3

$n = 3$ 9 999 997, 000 000 3
- 0,9 999 997 = 9 999 996, 000 000 6

… …

$n = 100$ 9 999 900, 000 495 0

Logaritmy a odmocniny

Hry s kalkulátorem

n	$\sqrt[n]{2}$
1	2
2	$1,414213562373095\ldots$
3	$1,259921049894873\ldots$
10	$1,0\,717734625362931\ldots$
100	$1,00$ **69** $55550056718\ldots$
1 000	$1,000$ **693** $38746258\ldots$
10 000	$1,0000$ **6931** $7120376\ldots$
100 000	$1,00000$ **69314** $958282\ldots$
1 000 000	$1,000000$ **693147** $4208\ldots$

ln 2 = 0, **6931471805599453** ...

Cifry jsou při volbě $n = 10^k$ stejné: je to náhoda?

Dekadické logaritmy

Od Napiera k Briggsovi

Napierova tabulka: mocniny základu $1 - 10^{-7}$

výhoda: výpočet opakovaným násobením základem
nevýhoda: nemožnost „lokálního zjemnění“
tabulku řídí mocniny, ne samotná čísla

Chceme přímo tabulkovou hodnotu y, a to např. k číslu $0,7$
Vzniká otázka vhodného základu, zvoleno číslo 10;
všechna čísla tedy vyjádřena jako mocniny čísla 10.

$$10^y = 0,7$$

Henry Briggs (1561--1630)
Arithmetica Logarithmica, London, 1624.
dekadické logaritmy

$$\log x = y \qquad x = 10^y$$

Logaritmy — výpočet dekadických logaritmů

Výpočet $\log_{10} 2$ základní pozorování: $\sqrt[n]{c} \to 1$

například $\sqrt[n]{2} \to 1$

n	$\sqrt[n]{2}$
1	2
2	$1,414213562373095\ldots$
3	$1,259921049894873\ldots$
4	$1,189207115002721\ldots$
5	$1,148698354997035\ldots$
20	$1,035264923841377\ldots$
100	$1,00\,6955550056718\ldots$
1 000	$1,000\,69338746258\ldots$
10 000	$1,0000\,69317120376\ldots$
100 000	$1,00000\,6931495828\ldots$
1 000 000	$1,000000\,69314742\ldots$
10 000 000	$1,0000000\,6931472\ldots$
100 000 000	$1,00000000\,6931471\ldots$

Logaritmy

Výpočet $\log_{10} 2$ tj. $\log_{10} 2 = y$
základní pozorování: $\sqrt[n]{c} \to 1$

$$\sqrt[n]{2} = 1 + \varepsilon_n \qquad \sqrt[n]{10} = 1 + \delta_n$$

$$\log_{10} 2 = y$$

$$2 = 10^y \qquad / \sqrt[n]{\ }$$

$$\sqrt[n]{2} = (\sqrt[n]{10})^y \qquad \text{tj.} \quad 1 + \varepsilon_n = (1 + \delta_n)^y$$

dle binomické věty: $1 + \varepsilon_n = 1 + y \cdot \delta_n + \cdots$

tj. $\varepsilon_n \approx y \cdot \delta_n$

$$y \approx \frac{\varepsilon_n}{\delta_n}$$

Logaritmy

příklad: výpočet log 2

$$\log_{10} 2 \approx \frac{\varepsilon_n}{\delta_n} = \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{10}-1}$$

2	$\frac{0{,}4142135623...}{2{,}1622776601...} = 0,\ 191\ldots$
10	$\frac{0{,}0717734625...}{0{,}2589254117...} = 0,277\,197\ldots$
100	$\frac{0{,}0069555500567...}{0{,}02329299228...} = 0,298\,611\ldots$
1 000	$\frac{0{,}00069338746258...}{0{,}002305238077...} = 0,300\,787\ldots$
10 000	$0,301\,005\ldots$
	...

$\log_{10} 2 = 0,\ 301\,029\,995\,664\ldots$

e – základ přirozeného logaritmu

motivace 1 – přírůstek obyvatelstva

městečko 5 000 obyvatel, roční přírůstek obyvatelstva ... 3 %

počet obyvatel po jednotlivých letech:

0	5000
1	$5000 + \frac{3}{100}\cdot 5000 = 5000\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)$
2	$5000\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^2$
3	$5000\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^3$
4	$5000\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^4$
	...
n	$5000\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^n$

podobně se chová složené úrokování

e – základ přirozeného logaritmu

motivace 2 – spojité úrokování

vklad 1 koruna, úrok 100 %

zůstatek na účtu po 1 roce, úročí-li banka n-krát ročně:

$1\times$ ročně $\quad 1+1=2$

$2\times$ ročně $\quad \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,\ 25$

$3\times$ ročně
$$\left[1+\frac{1}{3}\right]+\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\right]+\left[\left(\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\right]=$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\right)=\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2,\ 37\ldots$$

...

$n\times$ ročně $\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

modifikace pro vklad a, úrok p procent: $\quad a\cdot\left(1+\frac{p/100}{n}\right)^n$

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2, 25
3	2, 37037037...
4	2, 44140625...
5	2, 48832...
6	2, 52162637...
7	2, 546499697...
10	2, 59374246...
20	2, 6532977...
100	2, 7|0481382942...
1 000	2, 71|69239322...
10 000	2, 718|1459268...
100 000	2, 7182|68237...
1 000 000	2, 71828|0469...
10 000 000	2, 718281|69...
100 000 000	2, 7182818|148...

e = 2, 7 1828 1828 459 045 235 36...

Přirozený logaritmus

Základní pozorování:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

tj. $e \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ neboli $e^{1/n} = \sqrt[n]{e} \approx 1+\frac{1}{n}$

Výpočet $\ln 2$

$$\sqrt[n]{2} = 1+\varepsilon_n \qquad \sqrt[n]{e} \approx 1+\frac{1}{n}$$

$\ln 2 = \log_e 2 = y \qquad 2 = e^y \qquad / \sqrt[n]{}$

$\sqrt[n]{2} = (\sqrt[n]{e})^y$ tj. $1+\varepsilon_n = (1+\frac{1}{n})^y$

dle binomické věty: $1+\varepsilon_n = 1 + y\cdot\frac{1}{n} + \cdots$

tj. $\varepsilon_n \approx y\cdot\frac{1}{n}$

$$y \approx n\cdot\varepsilon_n = n\cdot(\sqrt[n]{2}-1)$$

Logaritmy a odmocniny Přirozené logaritmy

Přirozený logaritmus

příklad: výpočet $\ln 2 = \log_e 2$

Výhoda: pro výpočet hodnot $\ln x$ není třeba znát hodnotu čísla e

$$\ln 2 \approx n\cdot\varepsilon_n = n\cdot(\sqrt[n]{2}-1)$$

2	$2\cdot 0{,}414\,213\,562\cdots = 0{,}828\,427\,124\ldots$
10	$10\cdot 0{,}071\,773\,462\cdots = 0{,}717\,734\,62\ldots$
100	$0{,}69\vert 5\,555\,005\ldots$
1 000	$0{,}693\vert\,387\,462\ldots$
10 000	$0{,}693\,1\vert 71\,203\ldots$
100 000	$0{,}693\,14\vert 9\,582\ldots$
1 000 000	$0{,}693\,147\vert\,420\ldots$
	...

$\ln 2 = 0{,}693\,147\,180\ldots$

Logaritmy a odmocniny Přirozené logaritmy

Přirozený logaritmus

zkrátka...

$$\ln 2 \approx n\cdot(\sqrt[n]{2}-1)$$

$$\sqrt[1\,000\,000]{2} = 1{,}000\,000\,693\,147\ \ldots$$

$$\ln 2 = 0{,}693\,147\ \ldots$$

Logaritmy a odmocniny Přirozené logaritmy

Přirozený logaritmus a logaritmy o jiném základu

Definice logaritmu: je to inverzní funkce k exponenciále

$$y = a^x, \quad a>0,\ a\neq 1,\ x\in\mathbb{R}.$$

Jelikož je oborem hodnot interval $(0,+\infty)$, dostáváme:

$$y = log_a x \quad\Longleftrightarrow\quad x = a^y \qquad x\in(0,+\infty).$$

Logaritmujme poslední rovnost při libovolném základu, např. základu e:

$$\ln x = \ln a^y$$

Pravá strana: $\ln a^y = y\ln a$.

$$y = \boxed{log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

Kvadratura hyperboly

zpočátku byly logaritmy nástrojem pro usnadnění výpočtů

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

belgický jezuita **A. A. de Sarasa** objevil souvislost logaritmu a kvadraturou hyperboly, když studoval spis svého přítele:
Gregory St. Vincent: *Opus Geometricum* (Antverpy, 1647)