1.7 Dělicí poměr

$A_1 = (A_1, V_1, -)$ $\quad \vec{u} \in V_1 \quad \vec{u} \neq \vec{o} \quad \underbrace{A, B, C \in A_1}$

$V_1 = [\vec{u}]$

$\Rightarrow \quad C - A = x\vec{u}$

$\quad\quad C - B = y \cdot \vec{u}$

$C \neq B \Rightarrow \frac{x}{y}$ dělicí poměr bodu C vzhl. k bodům A, B

$A = B \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \ \forall C \in A_1$

Def. 1 A_1 ... afinní přímka se zam. V_1

$A, B, C \in A_1 \quad \vec{u} \in V_1, \vec{u} \neq \vec{o} \quad A \neq B \neq C \Rightarrow$ číslo $\frac{x}{y}$ naz. dělicí poměr bodu C vzhl. k bodům A, B

čísla x, y: $C - A = x \cdot \vec{u}$

$C - B = y \cdot \vec{u}$

ozn. $(A, B; C)$

- def. korektní – nezávisí na $\vec{u}$:

$\vec{v} = k \cdot \vec{u} \quad \cancel{(A,B;C) =} \frac{x_k}{y_k} \stackrel{?}{=} \frac{x}{y}$

$C - A = x \cdot \vec{u} = x_k \cdot \vec{v} = x \cdot k \cdot \vec{v}$

$C - B = y \cdot \vec{u} = y_k \cdot \vec{v} = y \cdot k \cdot \vec{v}$

$\frac{x_k}{y_k} = \frac{kx}{ky} = \frac{x}{y}$ ✓

- lze def. dělicí poměr tří bodů na přímce v A_n

- Jednoduché vyjádření dělicího poměru

zvolme $\vec{u} = C - B \Rightarrow y = 1$

$x = d$

$\Rightarrow C - A = d \cdot (C - B) \quad \Rightarrow A - C = d(B - C)$

- L: LSS na A_1 daná repérem $R = \langle P; \vec{u} \rangle \Rightarrow A = [a] \quad B = [b] \quad C = [c]$

tzn. $C = P + c \cdot \vec{u}$

$C - A = (c - a) \cdot \vec{u}$

$C - B = (c - b) \cdot \vec{u}$

tj. $(A, B; C) = \frac{x}{y} = \frac{c - a}{c - b}$

- Máme-li dány body $\underbrace{A \neq B}_{\in A_1}$ a $d \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \Rightarrow \exists!\, C \in A_1;\ (A, B; C) = d$ (a tento bod $C \neq B$)

$\frac{c - a}{c - b} = d$ tj. $c - a = d(c - b) \quad c - a = cd - bd \quad c - cd = a - bd$

$c = \frac{a - bd}{1 - d}$

tj.:

V1/ Buďte dány $A, B \in A_1$, $A \neq B$

$\Rightarrow$ zobr. $\forall C \in A_1, C \neq B \quad C \mapsto (A, B; C)$ je bijekce $A_1 \setminus \{B\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- Změna pořadí bodů v dělicím poměru

$A, B, C \in A_1$ navzájem různé $\quad (A, B; C) = d = \frac{c - a}{c - b}$

$(B, A; C) = \frac{c - b}{c - a} = \frac{1}{d}$

$(A, C; B) = \frac{b - a}{b - c} = \frac{a - b}{c - b} = \frac{c - b + a - c}{c - b} = 1 - \frac{c - a}{c - b} = 1 - d$

$(B, C; A) = \ldots = 1 - \frac{1}{d} \quad (C, A; B) = \frac{1}{1 - d} \quad (C, B; A) = \frac{d}{d - 1}$

A_n, LSS $\quad A_1' = [Q; \vec{v}]$ af. přímka v A_n $\quad Q = [q_1, \dots, q_n]$ $\quad \vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$

3 různé body $A, B, C \in A_1$ $\quad A = Q + a\vec{v}$ $\quad B = Q + b\vec{v}$ $\quad C = Q + c\vec{v}$

pak pro souřadnice bodů A, B, C : $\quad a_i = q_i + a v_i \quad b_i = q_i + b v_i \quad c_i = q_i + c v_i \quad i = 1, \dots, n$

odtud:
$$c_i - a_i = q_i + c v_i - (q_i - a v_i) = (c-a) v_i$$
$$c_i - b_i = (c-b) v_i \qquad i = 1, \dots, n$$

nechť pro dané $j \in \{1, \dots, n\}$: $v_j \neq 0$ $\Rightarrow$ $(A, B; C) = \dfrac{c_j - a_j}{c_j - b_j}$

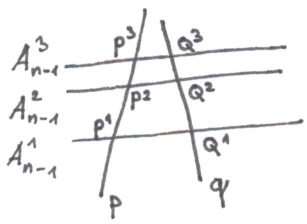
odtud:

<u>V2/</u> $(P^1, P^2; P^3) = (Q^1, Q^2; Q^3)$

kde

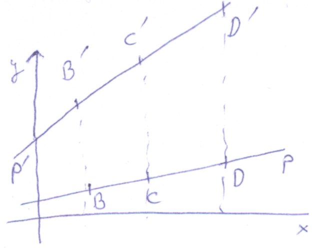
3 rovnob. různé nadroviny v A_n

$p, q \in A_n$ různob. s nadrovinami



I. Afinní zobrazení

1.1. Základní vlastnosti afinního zobrazení



Př. 1. Eukl. rovina, KSS E_2 $\quad X=[x,y] \mapsto f(X)=[x',y']$; $x'=x$, $y'=3y$

je Bijekce E_2 na E_2

B,C,D navz. různé, $B,C,D \in p \Rightarrow$ také $B',C',D' \in p'$ a $\underbrace{(B,C;D)}_{\lambda;\ D-B=\lambda(D-C)} = (f(B), f(C); f(D))$

studoval Euler 1738 (31 let) v Introductio in analysim infinitorum

Dvě křivky, z nichž jedna je obrazem druhé v takovém zobr., nazval Euler „afinní" dle lat. affinis příbuzný

Př. 2. v GI 1.6 – promítání
zde i def. afinního zobr.

promítání: $\rho \subset A_3$, $p \subset A_3$ $p \not\parallel \rho$ $\quad f: A_3 \to \rho \quad X \mapsto \underbrace{f(X)}_{}$ průmět bodu X na rovinu ρ ve směru přímky p

$\forall X \in \rho: f(X)=X \qquad \forall X \notin \rho: X f(X) \parallel p$

B,C,D navz. různé, leží v jedné přímce
tj. $D-B=\lambda(D-C) \quad \Rightarrow f(D)-f(B)=\lambda(f(D)-f(C))$

$BC \nparallel p \Rightarrow f(B), f(C), f(D)$ navz. různé

f opět ukázkou afinního zobr.

$KL \parallel p \Rightarrow f(K)=f(L)$

def. af. zobr. – viz 1.6 v GI
zde pomocí dělicího poměru bodů

Def 1.1 zobr. $f: A \to A'$ (af. pr. → af. prostor) naz. afinní, jestliže: nav. různé $B,C,D \in A$ leží na přímce $\Rightarrow f(B), f(C), f(D)$

buď
- splývají

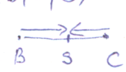
nebo
- jsou navzájem různé, leží na přímce a $(f(B), f(C); f(D)) = \underbrace{(B,C;D)}_{D-B=\lambda(D-C)}$

alternativní def.:

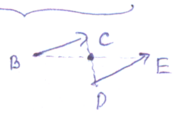
f afinní $\Leftrightarrow$ $\forall B,C,D \in A$; $D-B=\lambda(D-C) \Rightarrow f(D)-f(B)=\lambda(f(D)-f(C))$

- všechny body přímky se zobrazí:
  - do jediného bodu
  - na přímku

- střed úsečky BC se zobrazí na střed úsečky $f(B)f(C)$: S střed $BC \Rightarrow (B,C;S)=-1=(f(B),f(C);f(D))$



- $B,C,D,E \in A$; $\underbrace{C-B=E-D}_{}$



$C-B=E-D \Leftrightarrow \frac{1}{2}(B+E)=\frac{1}{2}(C+D)$
splývají středy BE a CD

f afinní zobr. $\Rightarrow$ také $\frac{1}{2}(f(B)+f(E)) = \frac{1}{2}(f(C)+f(D))$

tj. jsou-li dvě uspořádané dvojice bodů B,C, D,E umístěním téhož vektoru $u \in V$ – zaměř. A
tj. $C-B=E-D$

a je-li $f: A \to A'$ afinní zobr.

pak také $f(B), f(C)$ a $f(D), f(E)$ jsou umístěním téhož vektoru $\in V'$ – zaměř. A', tj. $f(C)-f(B)=f(E)-f(D)$

! lze tedy k af. zobr. přiřadit zobr. $\bar{f}: V \to V'$; $\quad \vec{u}=C-B \Rightarrow \bar{f}(\vec{u}) = f(C)-f(B)$

(definice $\bar{f}$ je korektní – nezávisí na umístění $\vec{u}$)

vlastnosti $\bar{f}$:

vlastnosti $\bar{f}$ • $\bar{f}(\vec{o}) = f(B) - f(B) = \vec{o}$

• $\vec{u} = C - B$, $\vec{v} = D - C$ – zvolili jsme výhodně umístění $\Rightarrow \vec{u}+\vec{v} = D - B$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{f}(\vec{u}) = f(C) - f(B)\\ \bar{f}(\vec{v}) = f(D) - f(C)\end{array}\right\} \bar{f}(\vec{u}+\vec{v}) = f(D) - f(B) = f(D) - f(C) + f(C) - f(B) = \bar{f}(\vec{v}) + \bar{f}(\vec{u})$$

• $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ $\quad \vec{u} = C - B$, $\vec{v} = D - B$ $\quad B, C, D$ leží na 1 přímce

$D - B = \lambda (C - B)$ af. zobr. dle def. zachovává dělicí poměr $\Rightarrow f(D) - f(B) = \lambda(f(C) - f(B))$

$\bar{f}(\vec{v}) = \lambda \cdot \bar{f}(\vec{u})$

$\bar{f}$ je tedy homomorfismus

$\bar{f}: V \to V'$ je jednoznačně přiřazen zobr. f
asociován

[$\bar{f}$ naz. asociovaný hom. afinního zobr. f

def. z 61 1.6.1 str. 61 – alternativní def. af. zobr.

Def. $A_n = (A, V_n, -)$, $A'_m = (A', V'_m, -)$ $\Rightarrow$ zobr. $f: A \to A'$ naz. afinní zobrazení prostoru A_n do A'_m, $\exists$-li hom. $\bar{f}: V_n \to V'_m$; ~~$X' = f(X)$, $Y' = f(Y)$~~ $f(Y) - f(X) = \bar{f}(Y - X)$

$\bar{f}$ – asociovaný homomorfismus k afinnímu zobrazení f

• k af. zobr. je jednozn. přiřazen hom. $\bar{f}$ a opačně?

víme: $f(C) - f(B) = \bar{f}(C - B) \Rightarrow f(X) = f(B) + \bar{f}(X - B) \Rightarrow$ mám-li $\bar{f}$ a $\underbrace{f(B)}_{\text{obraz jednoho bodu}} \Rightarrow$ mám def. f

a f takto def. je afinní: tj. zachová $(X, Y; Z)$ $\quad Z - X = \lambda(Z - Y) \Rightarrow f(Z) - f(X) = f(B) + \bar{f}(Z - B) - [f(B) + \bar{f}(X - B)] =$

$= \bar{f}(Z - B) - \bar{f}(X - B) = \bar{f}(Z - X) = \bar{f}(\lambda(Z - Y)) = \lambda \bar{f}(Z - Y) = \lambda \cdot (f(Z) - f(Y))$

tj.:

V1/ $\forall$ af. zobr. $f: A \to A'$ $\exists!\ \bar{f}: V \to V'$ (asoc. hom.); $f(B + \vec{u}) = f(B) + \bar{f}(\vec{u})$ $\forall B \in A$ $\forall \vec{u} \in V$

$\forall \bar{f}: V \to V'$ homom. $\forall B \in A, B' \in A'$ $\exists!$ af. zobr. $f: A \to A'$, jehož asoc. hom. je $\bar{f}$ a $f(B) = B'$

f dáno předpisem: $f(X) = B' + \bar{f}(X - B)$

• af. zobr. a rovnoběžky:

$f: A \to A'$ $\quad p \parallel q$ přímky v A $\quad p: X = P + t \cdot \vec{u}$, $q: Y = Q + s \cdot \vec{u}$ $\quad t, s \in \mathbb{R}$

Př. rovnoběžné promítání $A_3 \xrightarrow{\text{do}} A_2$ ve směru přímky s různob. s A_2
$p, q \parallel s \Rightarrow$ se zobr. do bodu
jinak do rovnoběžek (ne nutně různých)

• $\bar{f}(\vec{u}) = \vec{o} \Rightarrow f(X) = f(P) + t\bar{f}(\vec{u}) = f(P)$
$f(Y) = f(Q) + s\bar{f}(\vec{u}) = f(Q)$ $\quad$ tj. přímka p, q se zobr. celá do jediného bodu P, Q

• $\bar{f}(\vec{u}) \neq \vec{o} \Rightarrow f(X) = f(P) + t\bar{f}(\vec{u})$
$f(Y) = f(Q) + s\bar{f}(\vec{u})$ $\quad$ tj. přímka p, q se zobr. na přímku danou bodem $f(P)$, $f(Q)$ a (nenul.) vektorem $f(\vec{u})$

jsou tedy opět rovnoběžné

V2/ Při af. zobr. se dvě rovnoběžné přímky zobrazí:
buď – na dvě rovnob. přímky
nebo – každá z nich do bodu

V3/ Af. zobr. $f: A \to A'$ prosté (na) $\Leftrightarrow$ asoc. hom. $\bar{f}: V \to V'$ prostý (na)

důk.

$\forall X, Y \in A: \ f(X) - f(Y) = \bar{f}(X-Y)$

- f není prosté $\Rightarrow \exists X \neq Y \in A;\ f(X) = f(Y) \Rightarrow f(X) - f(Y) = \vec{o}$ $\quad X - Y = \vec{u} \neq \vec{o}$ tj. $\exists \vec{u} \neq \vec{o};\ \bar{f}(\vec{u}) = \vec{o}$ tj. $\vec{u} \in \operatorname{Ker} \bar{f}$
  Ker f netriv., tj. $\bar{f}$ není prosté
- $\bar{f}$ není prosté $\Rightarrow \exists \vec{o} \neq \vec{u} \in \operatorname{Ker} \bar{f}$, tj. $\bar{f}(\vec{u}) = \vec{o}$ $\quad f(X+\vec{u}) = f(X) + \underbrace{\bar{f}(\vec{u})}_{\vec{o}}$ tj. $f(X+\vec{u}) = f(X)$ tj. f není prosté
  pro $X + \vec{u} \neq X$
- f na, $\vec{v} \in V' \Rightarrow \exists K, L \in A';\ \vec{v} = K - L$ $\quad$ ke $K, L \ \exists M, N \in A;\ f(M) = K$, $f(N) = L$ $\quad \vec{v} = K - L = f(M) - f(N) = \bar{f}(\underbrace{M-N}_{\vec{u}})$ tj. $\vec{v}$ je obrazem nějakého vektoru z V
- $\bar{f}$ na, $Z \in A' \Rightarrow$ ~~pro~~ zvolme lib. $B \in A$ položíme $\vec{v} = Z - f(B)$
  $\bar{f}$ na $\Rightarrow \exists \vec{u} \in V;\ \vec{v} = \bar{f}(\vec{u})$
  $Z - f(B) = \bar{f}(\vec{u})$, tj. $Z = f(B) + \bar{f}(\vec{u}) = f(B + \vec{u})$
  Z je tedy obrazem bodu $B + \vec{u} \Rightarrow f$ na

Pozn. o dimenzích

prosté, lin. $\varphi: V_n \to V'_m$ $\quad$ φ do $\Rightarrow n \leq m$ $\quad$ odtud máme: prosté, af. $f: A_n \to A'_m$ $\quad$ f do $\Rightarrow n \leq m$

φ na $\Rightarrow n \geq m$ $\quad$ f na $\Rightarrow n \geq m$

φ bij. $\Rightarrow n = m$ $\quad$ f bijekce $\Rightarrow m = n$

$m = n \ \wedge\ f$ prosté $\Rightarrow f$ na

$m = n \ \wedge\ f$ na $\Rightarrow f$ prosté

Grassman

Určení afinního zobrazení

$P_0, P_1, \dots, P_n \in A_n$ LNZ body (tj. vektory $P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0$ LNZ) $\Rightarrow P_0, \dots, P_n$ neleží v žádné jedné nadrovině

af. zobr. $f: A_n \to A'$ je jednoznačně určeno $f(P_0)$ a $\bar{f}$

$\bar{f}$ jednozn. určeno obrazy vektorů lib. báze, třeba $\langle \bar{f}(P_1 - P_0), \dots, \bar{f}(P_n - P_0) \rangle$

tj.: $\quad f(P_k) = ?$ ... jednoznačně určeno $f(P_k)$, protože $f(P_k) = f(P_0) + \bar{f}(P_k - P_0)$

V4/ af. zobr. $f: A_n \to A'$ je jednoznačně určeno obrazy $f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_n)$ LNZ bodů $P_0, \dots, P_n \in A_n$

K lib. zvoleným bodům $P'_0, \dots, P'_n \in A'$ $\exists!$ af. zobr. $f: A_n \to A'$; $f(P_k) = P'_k$ pro $k = 0, 1, \dots, n$.

Př. 3 af. zobr. $f: A_2 \to A'$ jednoznačně určeno vrcholy $\triangle$ B, C, D

- $f(B), f(C), f(D)$ tvoří v A' $\triangle$

  f tedy prosté

  těžnice a těžiště $\triangle BCD$ se zobr. na těžnice a těžiště $\triangle f(B) f(C) f(D)$, protože prosté af. zobr. zachovává dělicí poměr

2. Analytické vyjádření afinního zobrazení

6

oproti GII, str. 15, píši i místo j a j místo i

A_n, LSS dána repérem $\langle P; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \rangle$ $\quad f: A_m \to A'_m$ af. zobr.

A'_m $\quad \langle Q; \vec{d}_1, \dots, \vec{d}_m \rangle$ $\quad \bar{f}$ asoc. hom.

Položme: $\bar{f}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{d}_i \qquad f(P) = Q + \sum_{i=1}^{m} b_i \vec{d}_i$

$$X = P + \sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j \Rightarrow f(X) = f(P) + \bar{f}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{e}_j\right) = f(P) + \sum_{j=1}^{n} x_j \underbrace{\bar{f}(\vec{e}_j)}_{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{d}_i} = Q + \sum_{i=1}^{m} b_i \vec{d}_i + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) \vec{d}_i =$$

$$= Q + \sum_{i=1}^{m} x'_i \vec{d}_i$$

(1) $\boxed{x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i}$ $\quad i = 1, \dots, m$

toto jsou rovnice afinního zobr. f vzhl. ke zvoleným LSS $\qquad X = [x_1, \dots, x_n]$, $f(X) = [x'_1, \dots, x'_m]$

• asoc. homomorfismus:

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} u_j \vec{e}_j \in V \qquad \bar{f}(\vec{u}) = \sum_{j=1}^{n} u_j \bar{f}(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} u_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{d}_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j\right) \vec{d}_i = \sum_{i=1}^{m} u'_i \vec{d}_i$$

$\boxed{u'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j}$ $\quad i = 1, \dots, m$ $\qquad \vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\bar{f}(\vec{u}) = (u'_1, \dots, u'_m)$

maticově: $U' = A \cdot U$

• Transf.: $U'_{C_2} = A U_{B_2} \qquad U'_{C_2} = P_{C_1 C_2} U'_{C_1}$

$P_{C_1 C_2} U'_{C_1} = A P_{B_1 B_2} U_{B_1} \qquad U_{B_2} = P_{B_1 B_2} U_{B_1}$

$U'_{C_1} = \boxed{P_{C_2 C_1} A P_{B_1 B_2}} U_{B_1} \qquad B_1, B_2 \dots$ báze V, $C_1, C_2 \dots$ báze V'

• rovnice af. zobr. v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad X' = AX + B$$

$\uparrow \bar{f}(\vec{e}_1) \quad \uparrow \bar{f}(\vec{e}_n) \quad \uparrow f(P)$

obráceně

dána a_{ij}, b_i, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

tj. dány matice $\underset{m \times n}{A}$, $\underset{m \times 1}{B}$, $X = [x_1, \dots, x_n]$, $X' = [x'_1, \dots, x'_m]$ $\quad \forall X \in A_n \underset{\text{přiřadíme}}{\mapsto} X' \in A'_m$, $X' = AX + B \Rightarrow$ výsledné zobr. je afinní

souř. vzhl. ke zvol. LSS

$$Z - X = \lambda(Z - Y) \Rightarrow Z' - X' = AZ + B - (AX + B) = A \cdot (Z - X) = A \cdot (\lambda(Z - Y)) = \lambda \cdot (\underset{+B}{AZ} - \underset{-B}{AY}) = \lambda(Z' - Y')$$

tj. toto zobr. zachovává dělicí poměr – je afinní