3. Restrikce a skládání af. zobr. Inverzní af. zobr., grupa af. zobr.

1

• restrikce af. zobr. na podprostor je opět af. zobr. — přímo z def. af. zobr.

zachovává dělicí poměr na ~~podpr.~~ podprostoru => i na celém prostoru

asoc. hom. restringovaného af. zobr. je restrikcí asoc. hom. na zaměření af. podprostoru

3

• složení af. zobr. $f': A^* \to A'$, $f'': A' \to A''$ af. zobr.

$B, C, D \in A$: $D - B = \lambda(D - C) \Rightarrow f'(D) - f'(B) = \lambda(f'(D) - f'(C))$

protože f' je af. zobr.

f'' je také af. zobr. $\Rightarrow$ že pak i $f''(f'(D)) - f''(f'(B)) = \lambda\left[f''(f'(D)) - f''(f'(C))\right]$

tj. složené zobr. $f'' \circ f'$ je také af. zobr. $A \to A''$

jaký má asoc. homomorfismus? $\overline{f'' \circ f'} = ?$

$$\overline{(f'' \circ f')}(B - C) = (f'' \circ f')(B) - (f'' \circ f')(C) = f''(f'(B)) - f''(f'(C)) = \bar{f}''(f'(B) - f'(C)) = \bar{f}''(\bar{f}'(B - C)) = (\bar{f}'' \circ \bar{f}')(B - C)$$

tj.: $\overline{f'' \circ f'} = \bar{f}'' \circ \bar{f}'$

asoc. hom. složení af. zobr. je složením asoc. homomorfismů jednotlivých af. zobr.

2

• dle rovnic (2) z předch. kapitoly:

restrikce af. zobr. na A_r je prosté zobr. (odebrali jsme totiž vektory jádra)

celkem je zobr. f složením projekce $p: A_n \xrightarrow{na} A_r$ ve směru $\mathrm{Ker}\,\bar{f}$ a restrikce $f' = f_{/A_r}$

4

• af. zobr. $f: A_n \xrightarrow{na} A'_m$ je-li f navíc prosté (tj. $m = n$) $\Rightarrow \exists\, f^{-1}$

B, C, D navzájem různé a kolineární $\Rightarrow$ $f(B), f(C), f(D)$ navzájem různé a kolin. a mají stejný dělicí poměr jako B, C, D

(f bijekce, af. zobr.)

stejnou vlastnost má i f^{-1}, protože f je bij.

$B', C', D' \in A'_m$, f bij. $\Rightarrow \exists\, B, C, D \in A_n$; $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$

$D' - B' = \lambda(D' - C')$ tj. $f(D) - f(B) = \lambda(f(D) - f(C))$ $\underset{f \text{ afinní}}{\Rightarrow}$ $\bar{f}(D - B) = \lambda \bar{f}(D - C)$

$\bar{f}$ lin.: $\bar{f}(D - B) = \bar{f}(\lambda(D - C))$ $/\bar{f}^{-1}$

f bij. $\Rightarrow \bar{f}$ bij.: $D - B = \lambda(D - C)$

f bij.: $f^{-1}(D') - f^{-1}(B') = \lambda\left(f^{-1}(D') - f^{-1}(C')\right)$

tj. f^{-1} zachovává dělicí poměr, je tedy také afinní zobr.

dokázat lze pouze pro bij. prostota f nestačí

6 4a

Def. afinita prostoru A — vzájemně jednoznačné afinní zobr. af. prostoru A na sebe (afinní transformace af. prostoru A)

6 • Všechny afinity prostoru A tvoří při obvyklém skládání grupu — grupu afinních transformací af. prostoru A

afinní grupu prostoru A

5 matice složení afinit a inverzní afinity

• af. zobr. $f: A_n \xrightarrow{do} A_n$ do sebe

pozn. f prosté $\Leftrightarrow$ f na $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ izomorfismus $\Leftrightarrow$ $A_{\bar{f}}$ je regulární

matice hom. $\bar{f}$

$X' = AX + B$

g další afinita prostoru A_n $X' = CX + D$

$g(f)$

$g \circ f$: $X' = C(AX + B) + D = CAX + (CB + D)$

složená afinita

inverzní afinita:

$g = f^{-1} \Leftrightarrow g \circ f = id.$ tj. $CA = E$ a $CB + D = O$

$X' = CX + D$ je inverzní afinitou k $X' = AX + B \Leftrightarrow \boxed{C = A^{-1} \qquad D = -CB}$

4. Samodružné body a směry afinních zobrazení

samodružné – zobrazí se samy na sebe

$f \ldots$ af. zobr. A_n do sebe $\quad X = f(X) \Leftrightarrow$ mají stejné souřadnice (vzhl. k téže LSS)

vzhledem k 1 LSS budeme vyjadřovat vzory i obrazy

rovnice afinního zobrazení: $X' = AX + B \qquad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

samodružné body tvoří af. podprostor:

- bod X samodružný v zobrazení $f \Leftrightarrow X = AX + B$ (pevný bod! $x = \cos x$)

$$(I - A)X = B$$

kdy má soustava řešení? $h(I-A) = h(I-A|B)$ a pak tvoří všechna řešení lineární množinu dim $k = n - h$

tj. množina samodružných bodů zobr. f tvoří afinní podprostor dimenze $n-h$

nebo také takto: $B \neq C$ samodružné body af. zobr. $f \Rightarrow$ jsou samodružné všechny body přímky BC:

raději D

přímka BC: $X - B = t(C - B)$, $t \in \mathbb{R}$

obrazy jejích bodů $f(X) - f(B) = t(f(C) - f(B))$, tj. $f(X) - B = t(C - B) \Rightarrow f(X) = X$

Všechny samodružné body af. zobr. f tvoří: $\emptyset$ nebo bod, nebo přímku, rovinu, ...

Je-li mn. všech samodružných bodů celý $A_n \Rightarrow f$ je identita na A_n

a nyní o samodr. směrech:

def. 1 směr afinního prostoru – jednorozměrný podprostor jeho zaměření

samodružný směr – směr, který se při asociovaném zobr. zobrazí na sebe

- každý nenul. vektor ze zaměření af. prostoru určuje jednoznačně právě 1 směr af. prostoru

  2 nenul. vektory určují tentýž směr $\Leftrightarrow$ jsou LZ

  každá afinní přímka určuje směr (je to její zaměření)

  2 přímky určují týž směr $\Leftrightarrow$ jsou rovnoběžné

- Jiné zavedení směru: 2 nenul. vektory určují týž směr $\Leftrightarrow$ jeden z nich je <u>kladným</u> násobkem druhého

(orientovaný směr) směr pak není určen přímkou, ale polopřímkou

každá přímka pak určuje dva směry – směry opačné

- $p = [A; \vec{u}] \subset A_n \quad f: A_n \to A_n$ af. zobr., $\bar{f}$ asoc. hom.

  $\bar{f}(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$, $\lambda \neq 0$ (tj. $\vec{u}$ vlastní vektor) $\Rightarrow p$ se zobrazí na přímku s ní rovnoběžnou (směr přímky p je při zobr. f samodružný)

  $\bar{f}(\vec{u}) = \vec{o} \Rightarrow p$ (a každá přímka s ní $\parallel$) se zobrazí do bodu $\quad (\bar{f}(\vec{u}) = 0 \cdot \vec{u}$, tj. $\lambda = 0)$

  důležité: vektory $\neq \vec{o}$, které se zobrazí na svůj λ násobek, $\lambda \in \mathbb{R}$

V1/ Afinní zobr. $f: A_n \to A_n$ je prosté $\Leftrightarrow$ 0 není vl. číslem asoc. homomorfismu $\bar{f}$.

důk. f prosté $\Leftrightarrow \bar{f}$ prosté $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\bar{f}$ triviální, tj. ~~nenul. vša~~ žádný nenul. vektor $\vec{u}$ se nezobrazí na $\vec{o}$

0 není vl. číslem : pro žádný nenul. vektor $\vec{u} \neq \vec{o}$: $\bar{f}(\vec{u}) = 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Pozn. $\lambda = 0 \Leftrightarrow \det A = 0$

A reg. $\Leftrightarrow \bar{f}$ prosté

invertovatelná

Př. Af. zobr. roviny do sebe je dáno rovnicemi $x' = 2x - y + 1$, $y' = x + 2y + 3$. Určete samodružné body a směry.

řeš.: $X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

samodružný bod:

$(E - A)X = B$, tj. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, tj. $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$ $\exists!$ samodružný bod $X = [-2, -1]$

$y = -1$, $x = -2$

samodružný směr:

$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ $\lambda_{1,2} =$

$D = 16 - 20 < 0$ neex. reálné kořeny, tj. neex. vl. čísla ani vl. vektory

otočení – ale to je až eukl. klasif.

5. Posunutí, stejnolehlost

$f: A_n \to A_n$ afinita, pro kterou je každý směr samodružným – to je charakteristické pro stejnolehlost, odvodíme z toho anal. vyj.

tj. $\forall \vec{u} \neq \vec{o} \in V_n$ $\exists \lambda_{\neq 0}$; $\bar{f}(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$

λ nezávisí na $\vec{u}$ – je pouze jedno!

protože:

$\bar{f}(\vec{u}) = \lambda_1 \vec{u}$ $\bar{f}(\vec{v}) = \lambda_2 \vec{v}$ $\bar{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda_3(\vec{u} + \vec{v})$

$\vec{u}, \vec{v}$ LNZ

$\bar{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \bar{f}(\vec{u}) + \bar{f}(\vec{v}) = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} =$

$= \lambda_3(\vec{u} + \vec{v})$ tj. z LNZ $\vec{u}, \vec{v}$

$\lambda_1 = \lambda_3$ a $\lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

tj. $\exists \lambda_{\neq 0}$; $\forall \vec{u} \neq \vec{o} \in V$: $\bar{f}(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$

a pro $\vec{o}$ to platí také

tj.

V1/ Je-li při afinitě $f: A_n \to A_n$ každý směr na sebe samodružný, je $\bar{f}$ nenulovým násobkem identického izomorfismu. (tj. $\bar{f} = \lambda \cdot \mathrm{Id}$)

- 2 případy:

a) $\lambda = 1 \Rightarrow \bar{f}(\vec{u}) = \vec{u}$ $\forall \vec{u} \in V$ tj. $\bar{f}$ je identický automorfismus $f(X) = EX + B = X + B$

$\vec{a} := f(B) - B \Rightarrow \forall X \in A_n$: $f(X) = f(B) + \bar{f}(X - B) = f(B) + (X - B) = X + (f(B) - B) = X + \vec{a}$

$f(B) = B$, tj. $\vec{a} = \vec{o} \Rightarrow f$ je identita

$f(B) \neq B$, tj. $\vec{a} \neq \vec{o} \Rightarrow f$ je neidentické posunutí

b) $\lambda \neq 1$

$f(X) = f(B) + \bar{f}(X - B)$ samodružné směry předpokládáme všecky

$f(X) = f(B) + \lambda(X - B)$ samodr. body?

$X = f(B) + \lambda(X - B)$ $/ - B$ (aby byl na obou stranách vektor $X - B$

$X - B = f(B) - B + \lambda(X - B)$

$(1 - \lambda)(X - B) = f(B) - B$

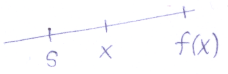
$X = B + \frac{1}{1-\lambda}(f(B) - B)$ $\exists!$ samodružný bod S

$f(X) = f(S) + \lambda(X - S)$

$f(X) - S = \lambda(X - S) \Rightarrow$ body $S, X, f(X)$ jsou vždy kolineární pro $X = S$ splývají v jediný bod

pro $X \neq S$: $(f(X), X; S) = \lambda$

$(f(X), X; S) = \lambda$



$\lambda = 2$

$f(X) - \underset{f(S)}{S} = \lambda(X - S)$

$\forall X, Y \in A_n: \boxed{f(Y) - f(X) = \lambda \underbrace{(Y - X)}_{\bar f(Y-X)}}$

tj. obrazem úsečky XY je úsečka $f(X)f(Y)$ s ní rovnoběžná

a to je důležitá vlastnost stejnolehlosti

$\bar f = \lambda \cdot Id$, $\lambda \neq 1$ ($\lambda \neq 0$); f stejnolehlost

S – střed stejnolehlosti (jediný samodružný bod)

λ – koeficient stejnolehlosti ($\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$)

někdy se připouští $\lambda = 1$ a id se počítá mezi stejnolehlosti za S pak lze brát lib. bod A_n

zde začít 25. 4. 2018

Grupa všech translací $f(X) = X + \vec b$

U složením translací dostanu tr.

A platí pro skládání relací

∃ nul. prvku: $\vec b = \vec o$, tj. f identita

∃ opačného prvku: $-\vec b$, tj. $f(X) = X - \vec b$

K $(f \circ g)(X) = f(g(X)) = g(X) + \vec b_1 = X + \vec b_2 + \vec b_1$

$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = f(X) + \vec b_2 = X + \vec b_1 + \vec b_2$ ✓

komutativní grupa

Skládání stejnolehlostí

f stejnolehlost se středem S a koeficientem λ $\quad f(X) = S + \lambda(X - S)$

g stejnolehlost se středem T a koeficientem μ $\quad g(X) = T + \mu(X - T)$

- $g(f(X)) = T + \mu(f(X) - T) = T + \mu(S + \lambda(X - S) - T) = T + \lambda\mu(X - S) + \mu(S - T)$

$\lambda\mu \neq 1 \Rightarrow g \circ f$ je složené zobr. opět stejnolehlost

koef. $g \circ f$: $\mu\lambda$ $\quad$ střed? P: je samodružný:

$$P = T + \lambda\mu(P - S) + \mu(S - T)$$
$$P - \lambda\mu(P - S) = T + \mu(S - T) \quad / -S$$
$$(P - S) - \lambda\mu(P - S) = T - S + \mu(S - T)$$
$$(1 - \lambda\mu)(P - S) = (1 - \mu)(T - S)$$
$$P = S + \frac{1-\mu}{1-\lambda\mu}(T - S) \Rightarrow$$

tvoří grupu, pokud stejný střed $S = T \Rightarrow P = S$

$\lambda\mu = 1 \Rightarrow g \circ f$ posunutí:

$g(f(X)) = T + X - S + \mu(S - T) =$
$= X + (1 - \mu)(T - S)$

- složením dvou stejnolehlostí můžeme dostat i translaci (pro $\lambda\mu = 1$), proto stejnolehlosti netvoří ani grupoid

komutativita skládání? (ne)

- $f(g(X)) = S + \lambda(g(X) - S) = S + \lambda(T + \mu(X - T) - S) = S + \lambda\mu(X - T) + \lambda(T - S)$

$\lambda\mu = 1 \Rightarrow f \circ g$ je posunutí

$f(g(X)) = S + (X - T) + \lambda(T - S) =$
$= X + (1 - \lambda)(S - T)$

jiné, než pro $g \circ f$ $\Rightarrow$ skládání stejnolehlostí ani afinit není komutativní

$\lambda\mu \neq 1 \Rightarrow f \circ g$ je stejnolehlost s koef. $\lambda\mu$

střed? R: $\quad R = S + \lambda\mu(R - T) + \lambda(T - S) \quad / -T$

$$R - T = S - T + \lambda\mu(R - T) + \lambda(T - S)$$
$$(1 - \lambda\mu)(R - T) = (1 - \lambda)(S - T)$$

analogicky

$$\boxed{R = \frac{1-\lambda}{1-\lambda\mu}(S - T) + T}$$

kdy splynou středy složení stejnolehlostí? $f(g)$ a $g(f)$

- $P - R = S - T - (S - T) \cdot \left[\frac{1-\mu}{1-\lambda\mu} + \frac{1-\lambda}{1-\lambda\mu}\right] = (S - T) \cdot \left[1 - \frac{1-\mu+1-\lambda}{1-\lambda\mu}\right] \neq \vec o$

$$\frac{1 - \lambda\mu - 2 + \lambda + \mu}{1 - \lambda\mu} = \frac{\lambda + \mu - \lambda\mu - 1}{1 - \lambda\mu} \neq 0$$

$\lambda(1 - \mu) - (1 - \mu) =$
$= (1 - \mu)(\lambda - 1) = 0$

$\lambda = 1 \lor \mu = 1$

koeficient $g \circ f$ a $f \circ g$ obecně stejný: $\lambda\mu$,

střed však obecně jiný $\quad$ středy splynou pouze v případě, že alespoň jeden z f nebo g je translace ($\lambda = 1 \lor \mu = 1$)

0 ve jmenovateli

Grupa homothetií

stejnolehlosti a translace prostoru A_n jsou už uzav. vzhl. ke skládání

A ✓ ∃ n : identita ∃ opač. prvku ✓

posunutí: $f(X) = X + B$ $\quad f^{-1}(X) = X - B$ $\quad (f \circ f^{-1})(X) = (X - B) + B = X$

stejnolehlost: $f(X) = S + \lambda(X - S)$

$f^{-1}(X) = S + \frac{1}{\lambda}(X - S)$ $\quad (f \circ f^{-1})(X) = S + \lambda\left(S + \frac{1}{\lambda}(X - S) - S\right) =$

$= S + \lambda \cdot \frac{1}{\lambda}(X - S) =$

$= S + (X - S) = X$ ✓

K : není obecně kom.

Def. homothetie — společný název pro translaci a stejnolehlost prostoru A_n (= homothetická transformace prostoru A_n

homothetie — afinita, při níž je každý směr samodružný
tj. úsečku zobrazí na úsečku s ní rovnoběžnou

stejnolehlosti tvoří grupu, pokud stejný střed

grupa translací je podgrupou grupy homothetií a ta je podgrupou grupy afinit prostoru A_n

V2 Všechny homothetie af. prostoru A_n tvoří grupu (tzv. grupa všech homothetických transformací prostoru A_n)
homothetií

plyne z předchozího

lze dokázat i takto: směr samodružný při dvou afinitách je samodružný i při složené afinitě i při inverzní afinitě