Afinní zobrazení $A_n \to A_n$

klasifikace případu, kdy má toto zobrazení <u>nadrovinu</u> samodružných bodů

- množina všech samodružných bodů af. zobr. $f: A_n \to A_n$ tvoří af. podprostor v A_n

  pokud by byl podprostor samodr. bodů roven celému A_n $\Rightarrow$ by f byla identita $\quad (f(X)=X \quad \forall X \in A_n)$

  postupujme systematicky: co by bylo f, kdyby mn. všech samodružných bodů tvořila podprostor dimenze $n-1$,

  tj. nadrovinu? Všechny možnosti vyšetříme v této kapitole.

Označme nadrovinu samodr. bodů zobrazení $f: A_n \to A_n$ písmenem ρ.

tj. $\forall X \in \rho: \quad f(X) = X$

nadrovinu ρ lze zadat n LNZ body, které v ní leží

af. zobr. f je zadáno obrazy $n+1$ LNZ bodů, tj. vezmeme těch $\underbrace{n \text{ LNZ bodů nadroviny } \rho}_{\text{ty se zobrazí samy na sebe}}$ a 1 bod,

který v ρ neleží, ozn. jej $B \notin \rho$

tj. $f(B) \neq B$, neboť není samodružný

Najít obraz bodu B je netriviální, neboť $f(B) \neq B$.

Klasifikujme všechny možnosti, které mohou nastat:
- $f(B) \in \rho$
- $f(B) \notin \rho$

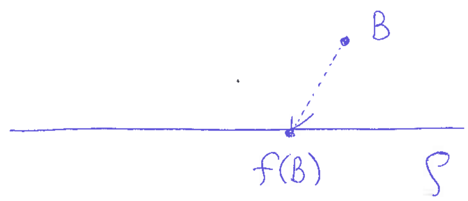
Projekce

nechť je zadán obraz bodu $B \notin \rho$, pro nějž platí: $\boxed{f(B) \in \rho}$

jelikož jsou zadány i obrazy dalších n LNZ bodů (leží v ρ, zobrazují se samy na sebe), tak je f jednoznačně zadáno

Úkol: najděme f

- triviální: $\forall X \in \rho: \quad f(X) = X$
- najděme tedy $f(X)$ pro $X \notin \rho$



- f afinní $\Rightarrow$ $f(X) = f(B) + \bar{f}(X - B)$
- dosaďme $X = f(B)$:

$$\underbrace{f(f(B))} = f(B) + \bar{f}(f(B) - B)$$

$f(B) \in \rho \Rightarrow f(f(B)) = f(B)$

$$\Rightarrow \quad f(B) = f(B) + \bar{f}(f(B) - B)$$

$$\bar{f}(f(B) - B) = \vec{o}$$

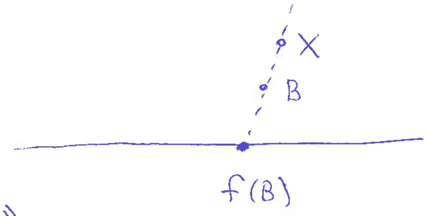
tj. vektor $f(B) - B \in \operatorname{Ker} \bar{f}$

a v $\operatorname{Ker} \bar{f}$ není „nic víc", tj. $\dim \operatorname{Ker} \bar{f} = 1$,

tj. $\operatorname{Ker} \bar{f} = [f(B) - B]$

protože $n-1$ LNZ vektorů ze zaměření nadroviny ρ se zobrazí na sebe, takže se nezobrazí na $\vec{o}$

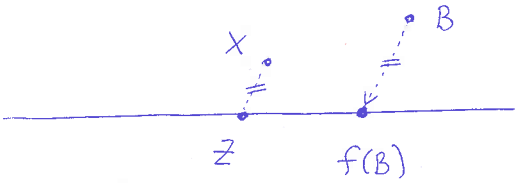
• najděme $f(X)$ pro $X \in$ přímka $\overleftrightarrow{Bf(B)}$



$$\text{tj. } X = f(B) + \underbrace{(X - f(B))}_{= c\cdot(B - f(B))}$$

$$f(X) = f\big(f(B) + c\cdot(B - f(B))\big) = \underbrace{f(f(B))}_{f(B)} + c\cdot \underbrace{\bar{f}(B - f(B))}_{\vec{o}} = \underline{\underline{f(B)}}$$

• najděme $f(X)$ pro $X \notin \overleftrightarrow{Bf(B)}$ (a samozřejmě $X \notin \rho$)



vektor $B - f(B)$ je výhodný: doplňuje zaměření ρ na bázi A_n; $\bar{f}(B - f(B)) = \vec{o}$

proto zvolíme $Z \in \rho$; $X - Z = c\cdot(B - f(B))$

$f(X) = \, ?$ $\qquad X = f(B) + (Z - f(B)) + (X - Z)$

$$f(X) = f\big(f(B) + (Z - f(B)) + (X - Z)\big) = \underbrace{f(f(B))}_{f(B)} + \underbrace{\bar{f}(Z - f(B))}_{Z - f(B)} + \underbrace{\bar{f}(X - Z)}_{\bar{f}(c\cdot(B - f(B))) = c\cdot\vec{o} = \vec{o}} =$$

$$= f(B) + (Z - f(B)) + \vec{o} = \underline{\underline{Z}} \qquad f(X) = Z$$

• Závěr: f je projekce do nadroviny ρ ve směru $B - f(B)$

• $f(B) \notin \rho$ $\Rightarrow$ f je af. transformace (afinita) (f totiž dáno $n+1$ LNZ bodů (obrazy), n jich mám z nadroviny a jeden je $f(B)$)

$f(X) = ?$ pro $X \notin \rho$ (protože pro $X \in \rho$: $f(X) = X$)

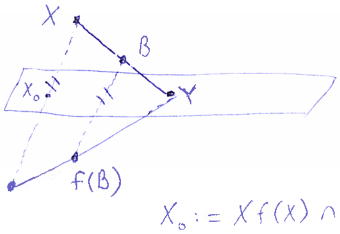
a) základní afinita s charakteristikou

→ a) $\boxed{Bf(B) \nparallel \rho}$ (přímka), tj. jsou různoběžné $\Rightarrow \exists$ průsečík B_0

– α) ať $X \notin Bf(B)$ (přímka) a $BX \nparallel \rho$ $\Rightarrow$ ozn. $Y = BX \cap \rho$ (přímka) $\quad X \in BY \Rightarrow f(X) \in f(B)Y$

$Y = f(Y)$, neboť $Y \in \rho$ $\quad$ f je totiž afinní

f zachovává děl. poměr — $(B, X; Y) = (f(B), f(X); \underbrace{f(Y)}_{=Y})$



$Y - B = \lambda(Y - X) \Rightarrow Y - f(B) = \lambda(Y - f(X))$

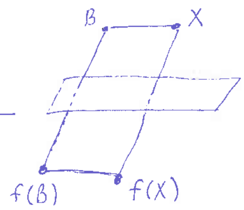
$B - f(B) = \lambda(X - f(X))$ $\quad$ tj. $Bf(B) \parallel Xf(X)$

$X_0 := Xf(X) \cap \rho$

$(X, f(X); X_0) = (B, f(B); B_0)$ ← „proporce" na obou čárkovaných rovnoběžkách jsou stejné
dělicí poměr se při středovém promítání na rovnoběžné přímky zachovává

analyticky: $X - X_0 = \lambda(f(X) - X_0)$
$B - B_0 = \lambda(f(B) - B_0)$ $\quad$ triv.

– β) $BX \parallel \rho$



$B - X = f(B) - f(X)$ $\quad$ neboli asoc. homomorfismus $\bar{f}$ zobrazuje vektory ze zaměření ρ na sebe, tj. $B - X = \bar{f}(B - X)$, přitom $\bar{f}(B-X) = f(B) - f($

odsud máme $B - f(B) = X - f(X)$

tj. $Bf(B) \parallel Xf(X)$

? $(X, f(X); X_0) = (B, f(B); B_0)$

neboli: $X - X_0 = \lambda(f(X) - X_0)$
$B - B_0 = \lambda(f(B) - B_0)$ — platí, jedná se o tytéž vektory, je tedy λ stejné:

$X - X_0 = B - B_0$

$f(X) - X_0 = f(B) - B_0$ — z obr. či aplikací f

analyticky: víme: $B - X = f(B) - f(X)$

$B - X = B_0 - X_0$ – z rovnoběžnosti $B - X \parallel \rho$

– γ) $X \in Bf(B)$ tak sestrojíme nejprve obraz nějakého bodu $C \notin Bf(B)$, což z rovnoběžnosti umíme: $\underbrace{Xf(X) \parallel Cf(C)}_{\text{to pak bude platit}}$

víme totiž: $Cf(C) \parallel Bf(B)$

$(X, f(X); X_0) = (B, f(B); B_0)$

b) elace

→ b) $\boxed{Bf(B) \parallel \rho}$ $\quad$ pak $Xf(X) \parallel Bf(B)$ (vyšetřilo by se jako v β)

průsečíky s nadrovinou X_0, B_0 neexistují $\quad$ dělicí poměr $(X, f(X); X_0)$ tedy nemá smysl

máme (jako v předchozím) $f(X) - f(B) = X - B$

tj. $f(X) - X = \underbrace{f(B) - B}_{\vec{u} \neq \vec{o}}$ $\quad$ $f(X) = X + \vec{u}$

oproti předchozímu: $X, f(X), B, f(B)$ leží v jedné nadrovině $\delta \parallel \rho$ a $f|_\delta$ je posunutí

f_δ je posunutí

V1/ $f: A \xrightarrow{do} A$ af. zobr. ; všechny body nadroviny ρ jsou při f samodružné

je jednoznačně určeno : ρ, $f(B)$
obraz bodu $B \notin \rho$

Může nastat:

1. $f(B) = B \quad \Rightarrow \quad f = id$ na A
2. $f(B) \in \rho \quad \Rightarrow \quad f$ je projekce A na ρ ve směru $f(B) - B$
3. $B \neq f(B) \notin \rho$ a $Bf(B) \nparallel \rho \quad \Rightarrow$ všechny přímky $\underset{X \notin \rho}{Xf(X)}$ jsou navzájem $\parallel$ a je zachován dělicí poměr $(X, f(X); X_0) = k$ = konst.
   $X_0 := Xf(X) \cap \rho$
4. $B \neq f(B) \notin \rho$ a $Bf(B) \parallel \rho \quad \Rightarrow$ všechny přímky $\underset{X \notin \rho}{Xf(X)}$ jsou navzájem $\parallel$
   a restrikce na každou nadrovinu rovnoběžnou s ρ je posunutí. Pouze v případě nadroviny ρ samotné je toto posunutí identita

---

Def. 1 Afinity z bodů 3 a 4 naz. základní afinity
směr přímek $Xf(X)$ naz. směr základní afinity
elace — základní afinita z bodu 4

ēlātiō, -ōnis, f. — zdvihání, ~~vzhled~~ vzlet; uchvácení, vytržení

pro zákl. afinitu, jež není elací (tj. z bodu 3) naz. konstantu $k = (X, f(X); X_0)$ charakteristika základní afinity

v afinní rovině : zákl. afinity naz. osové afinity
přímku samodružných bodů naz. osa osové afinity

involuce — zobr. f prostoru na sebe, $f \neq id$, ale $f \circ f = id$

V2/ zákl. afinita je involuce $\Leftrightarrow$ není elací a $k = -1$

$X \notin \rho \Rightarrow f(X)$ je takový, že směr přímky $Xf(X)$ je totožný se směrem základní afinity a střed úsečky $Xf(X) \in \rho$

---

důk.
elace nemůže být involuce, protože restrikce elace na nadrovinu $\parallel \rho$ je neident. posunutí — posunutí složeno samo se sebou není identita

pro základní afinitu, jež není elací, je : $k = (X, f(X); X_0)$

má-li být $f(f(X)) = X$, musí též : $k = (f(X), f(f(X)); X_0)$

tj. $k = (f(X), X; X_0)$

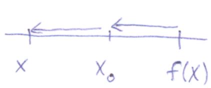
$$X - X_0 = k(f(X) - X_0)$$

$$f(X) - X_0 = k(X - X_0) \qquad k = 1, -1$$

$k = 1$ — id — nebereme za involuci

$k = -1$ — právě v tomto případě je zákl. af. involucí

$k = -1$: $X - X_0 = X_0 - f(X)$ kde leží X_0?



ve středu
přes souřadnice:

$x - x_0 = x_0 - f(x)$

$x + f(x) = 2x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{x + f(x)}{2}$

V3/ Každou afinitu A_n lze složit z nejvýše $n+1$ základních afinit.

(tj. $\exists$ nejvýše $n+1$ zákl. af.; $f = f_1 \circ \dots \circ f_m$, $m \leq n+1$)

afinita – tj. afinní transformace

zadána obrazy $n+1$ LNZ bodů – vezmu nadrovinu ρ_0 neobsahující P_0 a $f(P_0)$

$\exists$ základní afinita f_0; $f_0(P_0) = f(P_0)$ a ρ_0 je nadrovina samodružných bodů

viz str. 38–39

– vezmu ρ_1 procházející $f(P_0)$ (aby s tím už nepohla), neobsahující $f_0(P_1)$ a $f(P_1)$

$\exists$ zákl. af. f_1; $f_1(P_0) = f(P_0)$ a $f_1(f_0(P_1)) = f(P_1)$

nepohne, leží v nadr. samodr. bodů

–

...

až po $n+1$

ρ_{n+1} obsahuje $f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_n)$ $\Rightarrow$ f_{n+1} s nimi už nepohne

neobsahuje $f(P_{n+1})$ a $f_n(f_{n-1}(\dots f_1(f_0(P_{n+1}))))$

Analytické vyjádření základních afinit

- obecněji: zadejme nadrovinu samodružných bodů $\rho: \ c_1x_1+\dots+c_nx_n+c=0$
  (aspoň 1 z $c_1,\dots,c_n$ nenul.)
  najděme anal. vyjádření af. zobrazení, jež má mn. všech samodr. bodů právě ρ

$$f: X \mapsto X' \qquad X' = AX+B$$

samodružné body zobr. f: $\quad X = AX+B$

tato soustava má za řešení právě všechny body nadroviny ρ

$\Updownarrow$

se zredukuje na $c_1x_1+\dots+c_nx_n+c=0$

soustava $X=AX+B$ tedy musí mít v každém řádku λ_i-násobek rovnice nadroviny:

$$x_1 = x_1 + \lambda_1(c_1x_1+\dots+c_nx_n+c)$$
$$\dots$$
$$x_n = x_n + \lambda_n(c_1x_1+\dots+c_nx_n+c)$$

rovnice af. zobrazení f tedy musí mít tvar:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \lambda_1(c_1x_1+\dots+c_nx_n+c) \\ &\dots \\ x_n' &= x_n + \lambda_n(c_1x_1+\dots+c_nx_n+c) \end{aligned}}$$

- Pozn.: všechna $\lambda_i = 0 \Rightarrow f = id$
  tj. všechny body jsou samodružné

  pokud aspoň 1 $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow$ jsou samodružné právě body nadroviny ρ

- maticový zápis:

  ozn. $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

  pak $\rho: \ \underbrace{\underbrace{C^TX}_{1\times n \,\cdot\, n\times 1}}_{1\times 1} + c = 0$ a $\boxed{f(X) = X + \underbrace{(C^TX+c)}_{1\times 1\text{, tj. skalár závislý na } X} \cdot L}$, ozn. $\alpha_X = C^TX+c$

- základní pozorování:

$$f(X) = X + \alpha_X \cdot L \Rightarrow f \text{ posune bod } X \text{ ve směru vektoru } L$$

důsledky:

- kdy je f elace: když f posune bod X ve směru rovnoběžném s nadrovinou ρ
  tj. $L \in$ zaměření ρ
  tj. $\boxed{C^TL = 0}$ neboli $c_1\lambda_1+\dots+c_n\lambda_n = 0$

• kdy je f projekcí: když $f(X) \in \varrho \ \forall X \in \mathbb{A}_n$ a f afinní a mn. všech samodr. bodů f je právě ϱ

prošetříme oba případy: $X \notin \varrho \Rightarrow f(X) \in \varrho$

$X \in \varrho \Rightarrow f(X) \in \varrho$ (triv., X je samodr.)

– $X \notin \varrho$ a $f(X) \in \varrho$, tj. $f(X)$ vyhovuje rovnici nadroviny ϱ:

$$C^T f(X) + c = 0$$

tj. $C^T\big(X + (C^TX+c)\cdot L\big) + c = 0$

$$C^TX + (C^TX+c)\cdot C^TL + c = \underbrace{C^TX+c}_{\text{skalár}} + \underbrace{(C^TX+c)}_{\text{skalár}}\cdot \underbrace{C^TL}_{\text{skalár}} = \underbrace{(C^TX+c)}_{\neq 0 \ \Rightarrow}\cdot \underbrace{(1+C^TL)}_{\text{musí } = 0}=0$$

protože $X \notin \varrho$

– $X \in \varrho \Rightarrow f(X) \in \varrho$

(vlastně $f(X) = X$)

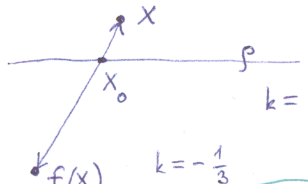
triv.: $f(X) = X + \underbrace{(C^TX+c)}_{X\in\varrho \ \Rightarrow \ =0}\cdot L = X + 0\cdot L = X$ ✓

tj. f projekce $\mathbb{A}_n$ na nadrovinu ϱ:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(X) = X + (C^TX+c)\cdot L \\ \text{a} \quad C^TL + 1 = 0 \\ \text{tj. projekce ve směru vektoru } L \end{array}}$$

bod X je posunut ve směru vektoru L, $\big(f(X) = X + \alpha_X \cdot L\big)$

• charakteristika $k = ?$ (není-li f $\underbrace{\text{elácí}}_{C^TL\neq 0}$ ani $\underbrace{\text{projekcí}}_{C^TL+1\neq 0}$)



$k = (X, f(X); X_0)$ tj. $X - X_0 = k\,(f(X) - X_0)$

$k = ?$

$k = -\frac{1}{3}$

ⓐ • bod X posunut ve směru vektoru L, tj. $X - X_0 = t\cdot L$

• a $X_0 \in \varrho$, tj. $C^TX_0 + c = 0$

$$C^T(X - tL) + c = 0$$

$$C^TX + c = t\,C^TL$$

$$t = \frac{C^TX+c}{C^TL}$$

tj. $X - X_0 = \dfrac{C^TX+c}{C^TL}\cdot L$

ⓑ $f(X) - X_0 = ?$

$$f(X) - X_0 = \underbrace{f(X)}_{X+(C^TX+c)L} - X + \underbrace{X - X_0}_{\text{viz ⓐ}} = (C^TX+c)\cdot L + \frac{C^TX+c}{C^TL}\cdot L$$

$$f(X) - X_0 = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{C^TL}\right)}_{\text{skalár}}\cdot \underbrace{(C^TX+c)}_{\text{skalár}}\cdot \underbrace{L}_{\text{vektor}}$$

ⓐ,ⓑ $\Rightarrow$ $X - X_0 = k\cdot(f(X) - X_0)$

$$\frac{C^TX+c}{C^TL}\cdot L = k\cdot\left(1 + \frac{1}{C^TL}\right)\big((C^TX+c)\cdot L\big)$$

koef. u vektoru se musí rovnat

$$\frac{1}{C^TL} = k\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{C^TL}\right)}_{\frac{C^TL+1}{C^TL}} \Rightarrow 1 = k\,(C^TL+1) \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{C^TL+1}}$$

• kdy je f involutorní — tj. $f(f(x)) = X$ a $f(x) \neq X$

$\Updownarrow$

$k = -1$

tj. $\dfrac{1}{C^T L + 1} = -1$

$C^T L + 1 = -1$ $\qquad \boxed{C^T L + 2 = 0}$

---

maticově: $X' = X + (C^T X + c) \cdot L$

• Jak vypadají rovnice např. v A_2?

ρ je přímkou: $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c = 0$

$$x_1' = x_1 + \lambda_1 (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c)$$
$$x_2' = x_2 + \lambda_2 (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c)$$

tj. $$X' = \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 c_1 & \lambda_1 c_2 \\ \lambda_2 c_1 & 1 + \lambda_2 c_2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} \lambda_1 c \\ \lambda_2 c \end{pmatrix}$$

Klasifikace afinních zobrazení majících nadrovinu samodružných bodů ρ: $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n + c = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$
identita

$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$
ne identita

$C^T L + 1 = 0$
projekce ve směru vektoru $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i + 1 = 0$
projekce

$\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i + 1 \neq 0$
základní afinita

$C^T L + 1 \neq 0$

$C^T L = 0$

$\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i = 0$
elace

$\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i \neq 0$
základní afinita, $k^{-1} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i + 1$

$C^T L + 2 = 0$

$\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i + 2 = 0$
involutorní zákl. afinita

$\sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i + 2 \neq 0$
neinvolutorní zákl. afinita

afinní zobr. f: $f(X) = AX + B$ tj. $\boxed{\begin{aligned} x' &= ax + by + p \\ y' &= cx + dy + q \end{aligned}}$ tj.: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 17

f prosté $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ samodružné body: $X = AX + B$, tj. $(E - A)X = B$

samodružné směry (tj. vlastní vektory): ~~$X = A\lambda\vec{u} = A\vec{u}$~~ tj. $(A - \lambda E)\vec{u} = \vec{o}$

$\exists \lambda \neq 0$; $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$

λ kořenem $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

$D = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = a^2 + 2ad + d^2 -$
$- 4ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc$

• $D > 0 \Rightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ 2 různé samodr. směry

LSS lze zvolit tak, že splývají se směry os x, y

tj. vlastní vektory jsou $(1,0)$, $(0,1)$ $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

samodružné body: $X = AX + B$, tj. $(E - A)X = B$ v našem případě: $\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda_1 & 0 & p \\ 0 & 1-\lambda_2 & q \end{array}\right)$

a) $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$ $\Rightarrow$ afinita f ~~má~~ $\exists!$ samodr. bod

zvolme jej za počátek, tj. $X_0 = [0,0]$ $\Rightarrow p = q = 0$

$f(X) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$

b) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \neq 1$ samodr. body: $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & p \\ 0 & 1-\lambda_2 & q \end{array}\right)$

• $p = 0 \Rightarrow$ přímka samodr. bodů ~~1~~ $y = \frac{q}{1-\lambda_2}$

zvolme počátek na této přímce $\Rightarrow q = 0$ $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X$

• $p \neq 0$ $\Rightarrow$ soustava NŘ $\Leftrightarrow$ neex. samodr. bod

$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

2 samodr. směry samodr. přímky? $\vec{u}_1 = (1,0)$ přímka $x = r$ se zobr. na $x = r + p$ není samodr.

$\vec{u}_2 = (0,1)$: přímka $y = r$ se zobr. na $y = \lambda_2 r + q$

tj. $\exists$ samodružná přímka pro r; $r = \lambda_2 r + q$, tj. $r = \frac{q}{1-\lambda_2}$

zvolíme-li počátek na této samodr. přímce $y = \frac{q}{1-\lambda_2}$, tak $q = 0$

$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$, $p \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0, 1$ $\lambda_1 = 1$

• $D = 0$ $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

$\exists$ alespoň 1 samodružný směr, zvolme LSS, aby to byl směr osy x $\Rightarrow$ $A\vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$

$a = \lambda$ $c = 0$

$A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ $D = 0$! $(a-d)^2 + 4bc = 0$ $\Rightarrow a = d = \lambda$

• $b = 0$ $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ každý směr samodružný $\Rightarrow$ f homothetie

$(A - \lambda E) = 0$

samodr. body: $\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & 0 & p \\ 0 & 1-\lambda & q \end{array}\right)$ • $\lambda = 1$ posunutí o $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ translace $p = 0 = q$ – identita $f(X) = EX$

$f(X) = EX + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ alespoň 1 z $p, q \neq 0$

• $\lambda \neq 1 \Rightarrow \exists!$ samodr. bod, zvolme jej za počátek

stejnolehlost $f(X) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} X$

$D = 0$, $b \neq 0$ $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$ 18

$\exists!$ samodr. směr – směr osy x

samodr. body: $\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & -b & p \\ 0 & 1-\lambda & q \end{array}\right)$ $\lambda = \begin{cases} 1 \\ \neq 1 \end{cases}$

- $\lambda = 1$ $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -b & p \\ 0 & 0 & q \end{array}\right)$
  - $q \neq 0$ nemá samodr. bod
    restrikce afinity f na přímku $y = -\frac{p}{b}$ je posunutí o q ve směru osy y
    počátek zvolme na přímce $y = -\frac{p}{b}$
    pak $p = 0$
    $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$
  - $q = 0$ $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -b & p \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ afinita f má celou přímku samodružných bodů $y = -\frac{p}{b}$
    zvolme na ní počátek $\Rightarrow p = 0$
    $f(X) = \begin{pmatrix} \cancel{\lambda} & b \\ 0 & \cancel{\lambda} \end{pmatrix} X$ elace
    $J = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f(X) = J \cdot X$ elace: osa x přímka samodr. bodů

na hladině C posune o c

tj. Bod $B = [0, c] \mapsto [c, c]$

$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ' afinita ,

$\exists!$ samodr. bod 1 samodr. směr

- $D < 0$ char. rov. nemá reálný kořen $\Rightarrow$ neex. samodr. směr

samodr. bod: $(E - A)X = B$ $\lambda \neq 1$, protože $\lambda \notin \mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists!$ řeš. – samodr. bod

zvolme jej za počátek LSS

$\lambda = \lambda_1 \pm \lambda_2 i$

samodr. směry neex. v $\mathbb{R}$, ale: $A\vec{u} = \lambda \vec{u}$ v $\mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 + i u_2 \\ v_1 + i v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_1 + i\lambda_2) \cdot (u_1 + i u_2) \\ (\lambda_1 + i\lambda_2) \cdot (v_1 + i v_2) \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 \\ \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad iA \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_1 \\ \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{w}_1 = (u_1, v_1)$ $\vec{w}_2 = (u_2, v_2)$

$$A\vec{w}_1 = \lambda_1 \vec{w}_1 - \lambda_2 \vec{w}_2 \quad \text{a} \quad A\vec{w}_2 = \lambda_1 \vec{w}_2 + \lambda_2 \vec{w}_1$$

jsou LNZ a oba nenulové, jinak by byl alespoň 1 z nich vlastním vektorem – spor
reál. vl. vektor neex.

LSS: za směry os vezměme směry vektorů $\vec{w}_1$ a $\vec{w}_2$ $\Rightarrow$ $f(X) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} X$ $\lambda_2 \neq 0$

	Žádný samodružný směr	Jeden samodružný směr	Dva samodružné směry	Každý směr je samodružný
Žádný samodružný bod	–	$x' = x + by$ $y' = y + q$ $bq \neq 0$	$x' = x + p$ $y' = \lambda_2 y$ $p \neq 0 \neq \lambda_2 \neq 1$	$x' = x + p$ $y' = y + q$ $(p, q) \neq (0, 0)$ posunutí, ne identita
Jeden samodružný bod	$x' = \lambda_1 x + \lambda_2 y$ $y' = -\lambda_2 x + \lambda_1 y$ $\lambda_2 \neq 0$	$x' = \lambda_1 x + by$ $y' = \lambda_1 y$ $b \neq 0 \neq \lambda_1 \neq 1$	$x' = \lambda_1 x$ $y' = \lambda_2 y$ $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2 \neq \lambda_1$ $\lambda_1 \neq 1 \neq \lambda_2$	$x' = \lambda_1 x$ $y' = \lambda_1 y$ $\lambda_1 \neq 0, \lambda_1 \neq 1$ stejnolehlost
Přímka samodružných bodů	–	$x' = x + by$ $y' = y$ $b \neq 0$ elace	$x' = x$ $y' = \lambda_2 y$ $0 \neq \lambda_2 \neq 1$ osová afinita, ne elace	–
Všechny body samodružné	–	–	–	$x' = x$ $y' = y$ identita