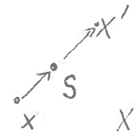
II. Zobrazení v eukleidovském prostoru

1. Shodná zobrazení $\quad f: E \xrightarrow{do} E'$

Def. 1 f shodné (izometrické) — zachovává vzdálenost bodů tj. $\forall X, Y \in E: \ |XY| = |f(X)\,f(Y)|$

např. • středová souměrnost: zvolíme pevně bod S $\quad X \mapsto X'$; $\quad X' - S = -(X - S)$

potom také $\forall X, Y \in E$: $\quad Y' - X' = -(Y - X) \implies |XY| = |X'Y'|$



$X' = S + (S - X)$

• translace v E: $\quad X' = X + \vec{a}$, $\quad \vec{a} \in$ zaměř. E $(\vec{a} \neq \vec{o})$ $\qquad Y' - X' = Y - X \implies |X'Y'| = |XY|$

obě zobr. lze zavést v af. prostoru, tam o nich ale nevíme, že jsou izometrie
nemáme tam totiž vzdálenost

• souměrnost podle nadroviny: střed XX' leží v nadrovině ρ a $XX' \perp \rho$

je to involutorní základní afinita, jejíž směr je $\perp$ na nadrovinu samodr. bodů ρ

V1 Každé shodné zobrazení je prosté a afinní

důk. zachovává dělicí poměr:

A, B, C navz. různé, ležící v 1 přímce $\quad$ A C B $\qquad C - A = \lambda(C - B) \quad \lambda < 0$ $\qquad$ C leží na úsečce $AB \iff$ v Δ nerovnosti: $|AB| = |AC| + |CB|$

f shodné zobr. $\implies |f(A)\,f(B)| = |f(A)\,f(C)| + |f(C)\,f(B)|$ tj. $f(C)$ také leží na úsečce $f(A)f(B)$

a žádné obrazy nemohou splynout, protože je zachována vzdálenost

máme tedy 3 různé obrazy v 1 přímce; $\qquad$ tj. f je prosté

tj.: $\quad f(C) - f(A) = \lambda'(f(C) - f(B))$, $\underbrace{\lambda' < 0}_{\text{protože } f(C) \text{ leží uvnitř úsečky}}$

$$|f(C)\,f(A)| = |\lambda'| \cdot |f(C)\,f(B)|$$

ale také: $|CA| = |\lambda'| \cdot |CB|$ $\quad$ a z $C - A = \lambda(C - B)$ máme: $|CA| = |\lambda| \cdot |CB| \implies |\lambda| = |\lambda'|$

a jelikož $\lambda < 0$ a také $\lambda' < 0 \implies \lambda = \lambda'$

tj. $(A, B; C) = (f(A), f(B); f(C))$ — dělicí poměr zobr. f zachovává

a kdyby C neležel uvnitř úsečky AB – víme, jak se děl. poměr změní, vztahy by se aplikovaly na např. $\quad$ A B C $\quad$ a ... jasné

... cbd.

Pozn.
tj. izometrie má stejné vyjádření, jako afinní zobr., lze hovořit o asoc. hom.: $\quad f(X) = f(B) + \bar{f}(X - B)$

obrácené tvrzení neplatí (např. élace)

V2 Afinní zobr. $f: E \to E'$ je izometrie $\iff \bar{f}$ zachovává normu vektoru, tj. $\|\bar{f}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$

důk. $\quad f(X) - f(B) = \bar{f}(X - B) \quad / \|\cdot\|$ $\qquad \vec{u} := X - B$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\|f(X) - f(B)\|}_{= \|X - B\|, \text{ protože } f \text{ izometrie}} = \|\bar{f}(X - B)\| \end{array}\right\} \|X - B\| = \|\bar{f}(X - B)\| \quad \text{tj. } \|\vec{u}\| = \|\bar{f}(\vec{u})\|$$

tj. f izometr. $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ zachovává normu $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

tj. zachovává skal. součin vektoru se sebou

že by pak ale nezachovalo $\vec{u}\cdot\vec{v}$ se stát nemůže :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$

máme skal. součin 2 různých vektorů vyjádřen pomocí skal. součinu stejných vektorů, tj. pomocí ~~normy~~ norem

plyne odtud:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2$$

lze tedy říci:

V3/ Af. zobr. $f: E \to E'$ je shodné $\Leftrightarrow$ asoc. hom. $\bar{f}$ zachovává skal. součin vektorů

tj. $\forall \vec{u},\vec{v} \in V$ (zaměř. E) : $\bar{f}(\vec{u})\cdot\bar{f}(\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}$

Pozn. stačí, ~~když~~ ověřovat pouze pro bázové vektory $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$:

$$\varphi\left(\bar{f}(\vec{u}), \bar{f}(\vec{v})\right) = \varphi\left(\bar{f}\left(\sum_{i=1}^n u_i\vec{e}_i\right), \bar{f}\left(\sum_{j=1}^n v_j\vec{e}_j\right)\right) =$$

$$= \varphi\left(\sum_{i=1}^n u_i \bar{f}(\vec{e}_i), \sum_{j=1}^n v_j \bar{f}(\vec{e}_j)\right) \underset{\varphi \text{BLF}}{=} \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n u_i v_j \cdot \varphi\left(\bar{f}(\vec{e}_i), \bar{f}(\vec{e}_j)\right)$$

$$\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n u_i\vec{e}_i, \sum_{j=1}^n v_j\vec{e}_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n u_i v_j\, \varphi(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$$

tj.:

$$\varphi(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \varphi\left(\bar{f}(\vec{e}_i), \bar{f}(\vec{e}_j)\right) \quad \forall i,j = 1,\dots,n \quad \Rightarrow \quad \varphi(\vec{u},\vec{v}) = \varphi\left(\bar{f}(\vec{u}), \bar{f}(\vec{v})\right) \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in V$$

~~Af.~~ určenost izometrie :

Af. zobr. dáno obrazy $n+1$ LNZ bodů

aby to byla izometrie, tak

potřebuji zachování skal. součinu na bázových vektorech

lze tedy:

V4/ $P_0, P_1, \dots, P_n$ LNZ body $\in E_n$

$f: E_n \to E'$ afinní zobr. Pak:

$$f \text{ shodné} \Leftrightarrow \left[f(P_i) - f(P_0)\right]\cdot\left[f(P_j) - f(P_0)\right] = (P_i - P_0)\cdot(P_j - P_0) \quad \forall i,j = 1,\dots,n$$

věta o určenosti shodného zobr.:

V5/ $P_0, P_1, \dots, P_n$ LNZ body $\in E_n$

$P_0', P_1', \dots, P_n' \in E'$ $\Rightarrow$ $\exists!$ shodnost $f: E_n \to E_n'$; $f(P_i) = P_i'$, $i = 0,1,\dots,n$ $\Leftrightarrow$ $|P_iP_j| = |P_i'P_j'|$, $i = 0,1,\dots,n$

např. v E_1 zadám obrazy dvou různých bodů A, B tak, že zachovám vzdálenost : $|f(A)f(B)| = |AB|$ aby taková shodnost existovala

v E_2 zadám obrazy vrcholů trojúhelníka, oba $\triangle$ musí být shodné $\triangle \cong \triangle'$

v E_3 obrazy vrcholů 4stěnu 4stěn $ABCD \cong$ 4stěn $A'B'C'D'$, aby shodné zobr. existovalo

Př. $A = [1,0] \mapsto A' = [1-\sqrt{2}, 0]$

$B = [0,1] \mapsto B' = [1,0]$

$C = [0,0] \mapsto C' = \left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

existuje izometrie ~~převádějící~~ zobrazující A na A', B na B' a C na C' ?

Řeš: $\|C-B\| = \|(0,-1)\| = 1 \quad \|C'-B'\| = \left\|\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$

$\|A-B\| = \|(1,-1)\| = \sqrt{2} \quad \|A'-B'\| = \|(-\sqrt{2},0)\| = \sqrt{2}$

ano, $\exists$ izom.

a jak vypadá? Potřebujeme anal. vyjádření

2. Analytické vyjádření shodného zobrazení

shodné zobrazení je také afinní, tj. je tvaru $\boxed{f(X) = AX + B}$

$f: E_n \to E'_m$

X vzhl. k reperu R

$f(X)$ vzhl. k reperu R'

f má zachovávat skal. součin φ (vezmeme) — vzdálenost, tj. $\|Y' - X'\| = \|Y - X\|$

φ sym. PD BLF $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{\varphi(\vec{u}, \vec{u})} \qquad \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^T B \vec{v}$

$$Y' - X' = AY + B - (AX + B) = AY - AX = A(Y - X)$$

$\|Y' - X'\| = \|A(Y - X)\|$ Jaká má být matice A? taková, aby $\boxed{\forall \vec{u} \in V_n : \|A \cdot \vec{u}\| = \|\vec{u}\|}$

nebo také: $\|A\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2$

$$\|\vec{u}\|^2 = \varphi(\vec{u}, \vec{u}) = \vec{u}^T B \vec{u}$$

$$\|A\vec{u}\|^2 = (A\vec{u})^T B (A\vec{u}) = \vec{u}^T A^T B A \vec{u}$$

rovnost $\forall \vec{u} \in V_n \iff \boxed{B = A^T B A}$

speciálně: KSS $\Rightarrow B = E$ tj. $\boxed{AA^T = E}$

Př. Jak vypadá izometrie z předch. příkladu?

$X' = [x', y'] \quad X = [x, y] \qquad X' = MX + P$

$$A' = MA + P$$
$$B' = MB + P$$
$$C' = MC + P$$

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & -1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

je inverzní sama k sobě

$$\left.\begin{array}{l} A' - B' = M(A - B) \\ C' - B' = M(C - B) \end{array}\right\} M \cdot (A - B, C - B) = (A' - B', C' - B')$$

$$M = (A' - B' \,|\, C' - B') \cdot (A - B \,|\, C - B)^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$C' = MC + P$$

$$\begin{pmatrix} 1 - 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + P, \text{ tj. } P = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

kontrola:

$$\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = A' = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B' = M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$C' = M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + P = P \checkmark$$

3. Grupa shodností

složení dvou shodných zobr. je opět shodné zobr. — přímo z def.

$$\bigcirc \xrightarrow[\text{zachová vzdálenost}]{f} \bigcirc \xrightarrow[\text{zach. vzdál.}]{g} \bigcirc$$ takže se zachovala vzdálenost

skládání — Asoc. ✓

id. je izometrie

shodné zobrazení je prosté — dokázáno

na? musíme předpokládat

Def. 1 Vzájemně jednoznačné zobr. $E \xrightarrow{na} E$ — shodnost

eukleidovského prostoru na sebe

V1/ Inverzní zobrazení k shodnosti je opět shodnost.

Všechny shodnosti eukleidovského prostoru tvoří při skládání grupu — tzv. grupa shodností tohoto EP.

Def. 2 ortonormální matice — čtvercová matice A; $A \cdot A^T = E$

lze také definovat takto: matice A, pro kterou $A^{-1} = A^T$

u shodných zobr. nešlo, A byla obecně obdélníková nebyla obecně čtvercová

V2/ Každá shodnost je ekviafinita.

důk. $f(X) = AX + B$, $A \cdot A^T = E$ ekviafinita: $|\text{modul } f| = 1$

modul $f := \det A$

$$\det A \cdot \det A^T = (\det A)^2 = 1$$

$\det A = \pm 1 \Rightarrow$ tj. je ekviafinita ... cbd.

samodružné body a samodružné směry shodností

vlastní čísla shodnosti:

$A\vec{u} = \lambda \vec{u}$ ale $\|A\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$ — je shodnost

$\|A\vec{u}\| = \|\lambda \vec{u}\| = \underbrace{|\lambda|}_{=1} \cdot \|\vec{u}\|$ $|\lambda| = 1$ vlastní čísla shodnosti jsou pouze 1 nebo −1.