4. Souměrnost podle nadroviny

V AP jsme prošetřovali af. zobr.; všechny body nadroviny ρ byly samodružné.

Z nich jsou izometrie 2: id. a souměrnost podle nadroviny

Souměrnost podle nadroviny: $\forall X \notin \rho$: $X \mapsto X'$; $XX' \perp \rho$ a střed úsečky XX' leží v ρ

jednoznačné určení souměrnosti — nadrovinou ρ

— 2 body X, X' (bodem a jeho obrazem, pokud nesplývají)

vzor a obraz není třeba rozlišovat, je to zobr. involutorní tj. je-li B obrazem bodu A, je A obrazem bodu B

probírat budeme pouze souměrnost podle nadroviny, proto budeme stručně psát souměrnost

V1/ Ke každé shodnosti $f: E_n \to E_n$ $\exists\, k < n+2$ souměrností podle nadrovin; f je jejich složením.

dûk. analogické důkazu se zákl. afinitami

$n+1$ LNZ bodů a jejich obrazy $\Rightarrow \exists!$ shodnost f; $f(P_i) = P_i'$

f_0 souměrnost; $f(P_0) = P_0'$

$\vdots$

$n=0$ triv.

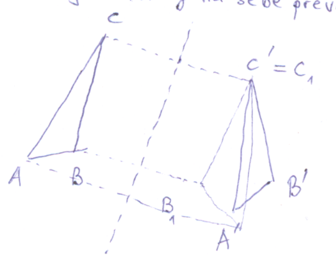
$n=1$: mohu posunout či „překlopit"

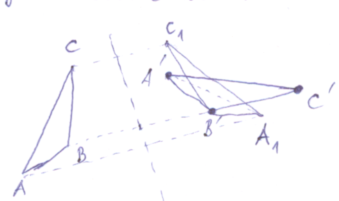
mohu složit ze dvou souměrností

je souměrnost

$n=2$

2 shodné trojúhelníky na sebe převedeme nejvýše 3 souměrnostmi:





obraz bodu, který zobrazíme jako první, bude ležet na ose souměrnosti druhé i dalších

ta bude osou úhlu „otočení"

nadrovina postupně obsahuje další a další „hotové" body

Analytické vyjádření souměrnosti podle nadroviny

Zvolme v E_n KSS, v ní má nadrovina ρ rovnici: $c_1x_1 + \dots + c_nx_n + c = 0$ aspoň 1 $c_i \neq 0$

rovnice souměrnosti: $\boxed{x_i' = x_i + \lambda_i(c_1x_1 + \dots + c_nx_n + c) \quad i = 1, \dots, n}$

souměrnost $\Rightarrow$ směr této základní afinity $\perp \rho$, tj. $XX' \perp \rho$ (není-li X samodr.)

— směr přímky XX' dán vektorem $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

— na nadrov. $\rho \perp (c_1, \dots, c_n)$

$\Rightarrow \boxed{L = \lambda \cdot C}$ $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ a $(c_1, \dots, c_n)$ jsou LZ $\lambda_i = \lambda c_i$

střed $XX' \in \rho \Rightarrow (c_1x_1 + \dots + c_nx_n + c)(2 + \lambda \sum c_i^2) = 0$ $\forall X \Rightarrow 2 + \lambda\sum c_i^2 = 0$ tj. $\lambda = \frac{-2}{\sum c_i^2}$ $/\cdot c_i$

$\boxed{\lambda_i = \frac{-2c_i}{\sum c_i^2}}$

$X' = X + L\cdot(C^TX + c)$ $/+X$ $:2$

$\frac{X'+X}{2} = \frac{2X + L(C^TX+c)}{2} = X + \frac{1}{2}L(C^TX+c) \in \rho$, tj. $C^T[X + \frac{1}{2}L(C^TX+c)] + c = 0$

$C^TX + c + \frac{1}{2}C^TL(C^TX+c) = 0$ $/\cdot 2$ $(C^TX+c)[2 + C^TL] = 0$

Př. E_2 souměrnost podle přímky $3x-4y+1=0$

rovnice této souměrnosti:

$$x' = x + \lambda_1(3x-4y+1)$$
$$y' = y + \lambda_2(3x-4y+1)$$

$L = \lambda C$

$2 + \lambda \sum c_i^2 = 0$

$\lambda = \frac{-2}{\sum c_i^2} \quad / \cdot c_i \quad \Rightarrow \lambda_i = \frac{-2c_i}{\sum c_i^2}$

$\sum c_i^2 = 3^2+4^2 = 25$

$\lambda_1 = \frac{-2\cdot 3}{25} = -\frac{6}{25} \qquad \lambda_2 = \frac{(-2)\cdot(-4)}{25} = \frac{8}{25}$

$$x' = x - \frac{6}{25}(3x-4y+1)$$
$$y' = y + \frac{8}{25}(3x-4y+1)$$

5. Souměrnosti v E_n

souměrnost podle nadroviny — involutorní shodnost; mn. všech samodr. bodů je nadrovina

všechny involutorní shodnosti?

- $f \neq id$, $f \circ f = id$ — to je involuce

$\Downarrow$

$\exists A \in E_n;\ f(A) \neq A \qquad f(f(A)) = A \qquad$ střed $Af(A) \mapsto$?

S i $f(S)$ má od A i $f(A)$ stejnou vzdálenost

zobrazí se sám na sebe

tj. každá involutorní shodnost má alespoň 1 samodružný bod

- $\bar{f} = ?$

$f \circ f = id \Rightarrow \bar{f} \circ \bar{f} = id : V_n \to V_n \qquad V_n$ - zaměření E_n

$\forall\ \vec{u}$ lze psát: $\vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \bar{f}(\vec{u})) + \frac{1}{2}(\vec{u} - \bar{f}(\vec{u}))$

pro $\vec{v}_1 = \vec{u} + \bar{f}(\vec{u})$: $\bar{f}(\vec{v}_1) = \bar{f}(\vec{u}) + \bar{f}(\bar{f}(\vec{u})) = \bar{f}(\vec{u}) + \vec{u} = \vec{v}_1$

pro $\vec{w}_1 = \vec{u} - \bar{f}(\vec{u})$: $\bar{f}(\vec{w}_1) = f(\vec{u}) - \bar{f}(\bar{f}(\vec{u})) = \bar{f}(\vec{u}) - \vec{u} = -\vec{w}_1$

máme: $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{w}_1$

obecně: $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, kde $\vec{v} \in V_1 = \{\vec{v} \in V_n;\ \bar{f}(\vec{v}) = \vec{v}\}$, $\vec{w} \in V_{-1} = \{\vec{w} \in V_n;\ \bar{f}(\vec{w}) = -\vec{w}\}$

$$V_n = V_1 \oplus V_{-1}$$

V_1 ~~obsahuje~~ je tvořen všemi vlastními vektory zobrazení $\bar{f}$, jimž odpovídá vl. číslo 1

V_{-1} — || — , ... vl. číslo -1

$V_1 \cap V_{-1} = \{\vec{o}\} \qquad \vec{v}\cdot\vec{w} = \bar{f}(\vec{v})\cdot\bar{f}(\vec{w}) = \vec{v}\cdot(-\vec{w}) = -\vec{v}\cdot\vec{w} \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$

f shodnost $\Leftrightarrow \bar{f}$ zachovává skal. součin $\qquad$ tj. $\vec{v} \perp \vec{w}$

$$\text{tj. } V_1 \perp V_{-1}$$

- S střed úsečky $Af(A)$ se zobrazí sám na sebe

ozn. $P_1 = [S; V_1]$ podprostor E_n — jsou to právě všechny samodružné body f

$P_{-1} = [S; V_{-1}]$ — || — E_n — závisí na volbě samodružného bodu S

$X \in P_1 \Leftrightarrow X = S + \vec{v},\ \vec{v} \in V_1 \qquad X \in E_n \Rightarrow X = S + \vec{v} + \vec{w}$ lze psát jednoznačným způsobem $\Rightarrow f(X) = f(S) + \bar{f}(\vec{v}+\vec{w}) = S + \bar{f}(\vec{v}) + \bar{f}(\vec{w}) = S + \vec{v} - \vec{w}$

protože $f(X) = S + \vec{v} - \vec{w}$, tak: $f(X) = X \Leftrightarrow \vec{w} = \vec{o}$, tj. $X \in P_1$

$X \notin P_1 \Rightarrow Xf(X) \perp P_1$ a střed $S + \vec{v}$ úsečky $Xf(X) \in P_1$ %

P_1 nemůže $= E_n$, to by $f = id \qquad P_{-1}$ může $= E_n$ pokud $P_{-1} = E_n \Rightarrow V_{-1} = V_n \quad P_1 = \{S\}$ a $X = S + \vec{w}$, $f(X) = S - \vec{w}$ středová souměrnost

Pozn. pro $X \notin P_1 \Rightarrow \underbrace{Xf(X)} \perp P_1$ a střed úsečky $Xf(X) \in P_1$ Proč?

$2\vec{w} \perp \vec{v}$ ✓

směrový vektor $Xf(X)$: $X = S + \vec{v} + \vec{w}$ $f(X) = S + \vec{v} - \vec{w}$

$X - f(X) = \vec{w} + \vec{w} = 2\vec{w}$

střed úsečky $Xf(X) = S + \frac{1}{2}(\vec{v}+\vec{w}+\vec{v}-\vec{w}) = S + \vec{v}$

- P_1 nemůže být celý E_n, to by $f = id$
- P_{-1} může $= E_n$ pokud $P_{-1} = E_n \Rightarrow V_{-1} = V_n$ a $P_1 = \{S\}$

$X = S + \vec{w}$ a $f(X) = S - \vec{w}$ – to je středová souměrnost

vše shrnme:

Def. 1 zvolme v E_n podP $P_1 = E_k$ dimenze k, $0 \leq k \leq n-1$

souměrnost prostoru E_n podle podp. E_k — zobr. $f: E_n \xrightarrow{na} E_n$; všechny body E_k jsou samodružné: $f(X) = X \ \forall X \in E_k$

$X \in E_n \setminus E_k \Rightarrow Xf(X) \perp E_k$ a střed úsečky $Xf(X)$ ~~$\in$~~ leží v E_k

přímka

V1 Každá involutorní shodnost eukleidovského prostoru je souměrnost tohoto prostoru podle některého podprostoru.

Př. v E_2 jsou involutorní shodnosti: – souměrnosti podle přímky (tj. osové souměrnosti)

je nadrovinou

– (souměrnosti podle bodu) středové souměrnosti

v E_3: – středová souměrnost
– osová souměrnost
– souměrnost podle roviny

- Jak vypadá osová souměrnost v E_3?

přímka $p = [A; \vec{u}]$ $p: X = A + t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$

f souměrnost podle přímky p $f(X) = X \ \forall X \in p$

pro $X \notin p$: najdeme $X_0 \in p$; $XX_0 \perp p$ tj. X_0 patou kolmice vedené bodem X na přímku p

$\Downarrow$

$X_0 = A + t\vec{u}$

$X - X_0 = (X-A) - t\vec{u} \perp \vec{u} \Rightarrow (X-A)\cdot\vec{u} - t\,\vec{u}\cdot\vec{u} = 0$, tj. $t = \dfrac{(X-A)\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$

$$X_0 = A + \frac{(X-A)\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\vec{u}$$

obraz $f(X)$ bodu X v souměrnosti f podle přímky p je bod souměrně sdružený k bodu X podle bodu X_0, tj.

$$f(X) = X_0 - (X - X_0) = 2X_0 - X = \underline{2A - X + 2\cdot\frac{(X-A)\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\cdot\vec{u}}$$

takto vypadá osová souměrnost nejen v E_3, ale v lib. E_n

předpis se nezmění, když místo A vezmeme $\underbrace{\text{jiný bod} \in p}_{B = A + r\cdot\vec{u}}$ a $\underbrace{\text{jiný vektor ze zaměření } p}_{\vec{v} = k\cdot\vec{u}}$ (ano, k se zkrátí)

6. Klasifikace shodností roviny

shodnost $f: E_2 \xrightarrow{na} E_2$, $f: X' = AX + B$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$x' = ax + by + p$$
$$y' = cx + dy + q$$

f shodnost $\iff$ A ortonormální, tj. $A^T A = E$ neboli $\cancel{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\cancel{a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2}$ $\quad a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2$

$ab + cd = 0$

$a^2 + c^2 = 1$ lze psát ve tvaru $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\exists! \alpha \in \langle 0, 360^\circ)$ $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$

$ab + cd = 0 \Rightarrow b\cos\alpha + d\sin\alpha = 0$, tj. $d = \varepsilon \cdot \cos\alpha$, $b = -\varepsilon \sin\alpha$

$-\varepsilon \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \varepsilon \cos\alpha \sin\alpha = 0$ ✓

$b^2 + d^2 = 1$ neboli $\varepsilon^2 \sin^2\alpha + \varepsilon^2 \cos^2\alpha = 1$, tj. $\varepsilon^2 = 1$ $\quad \varepsilon = < \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$

každá shodnost v rovině má matici A ve tvaru: $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ nebo $A_{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

$\varepsilon = 1$ $\qquad \varepsilon = -1$

$\det A_1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ – shodnost přímá

$\det A_{-1} = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$ – shodnost nepřímá

- shodnosti přímé: ∘ samodružné body: $X = AX + B$, tj. $(E - A)X = B$ neboli $\left(\begin{array}{cc|c} 1-\cos\alpha & +\sin\alpha & p \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha & q \end{array}\right)$

$\exists!$ řeš. $\iff \det(E - A) \neq 0$

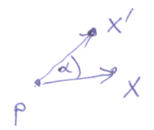
$(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha = 1 - 2\cos\alpha + \underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} =$

$= 2 - 2\cos\alpha \neq 0$

$\cos\alpha \neq 1 \quad \alpha \neq 0$

$\alpha \neq 0 \Rightarrow$ f má právě 1 samodružný bod P – zvolme jej za počátek

tj. $p = q = 0$



kde leží obraz X' bodu X?: $(X' - P) \cdot (X - P) = \cancel{(AX)^T \cdot X} = X^T A X =$

$= (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha) \cdot (x, y) = x^2\cos\alpha - \cancel{xy\sin\alpha} + \cancel{xy\sin\alpha} + y^2\cos\alpha =$

$= (x^2 + y^2)\cos\alpha = \|X - P\|^2 \cdot \cos\alpha =$

$= \|X - P\| \cdot \|X' - P\| \cdot \cos\alpha$

mohu, je izometrie

tj. f je otočení o úhel α kolem bodu P

např. bod [1,0] se zobrazí na [cos α, sin α]

∘ samodružné směry přímé shodnosti?

$\det(A - \lambda E) = \underbrace{(\cos\alpha - \lambda)^2 + \sin^2\alpha}_{\exists \text{ reálný kořen} \iff \sin\alpha = 0} = \cos^2\alpha + 2\lambda\cos\alpha + \lambda^2 + \sin^2\alpha = \lambda^2 + 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$

(a máme $\alpha \neq 0$)

tj. $\alpha = 180^\circ$

jedná se tedy o středovou souměrnost – každý směr je samodr.

∘ pro $\alpha = 0$ $\quad \cos\alpha = 1$

pak $\sin\alpha = 0$ a shodnost je: – identita (pro $p = q = 0$)

– neidentické posunutí (alespoň 1 z čísel $p, q \neq 0$) – každý ~~žádný~~ směr je samodr.

- shodnost nepřímá
  - $(E - A_{-1})X = B$ tj. $\left(\begin{array}{cc|c} 1-\cos\alpha & -\sin\alpha & p \\ -\sin\alpha & 1+\cos\alpha & q \end{array}\right)$

- první určeme samodružné směry: $\det(A - \lambda E) = (\cos\alpha - \lambda)(-\cos\alpha - \lambda) - \sin^2\alpha =$

$$= -\cos^2\alpha + \lambda^2 - \sin^2\alpha = \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array}\right.$$

nepřímá shodnost má dva samodružné směry $[\vec{u}_1]$, $[\vec{u}_2]$

$$\bar{f}(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 \qquad \bar{f}(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2$$

zachovávají se úhly nenulových vektorů $\Rightarrow$ $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$

podrobněji: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \bar{f}(\vec{u}_1) \cdot \bar{f}(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 \cdot (-\vec{u}_2) = -\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_1 \vec{u}_2 = 0$

zvolme KSS; směr osy x je totožný s 1. samodružným směrem
y 2.

$$A \cdot \vec{u}_1 = \vec{u}_1 \qquad A\vec{u}_2 = -\vec{u}_2$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + B$$

tj. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A_{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

$\alpha = 0$

$\rightarrow$ samodružné body?

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & p \\ 0 & 2 & q \end{array}\right)$ $\qquad p = 0 \Rightarrow \exists$ přímka samodružných bodů, řešení je $2y = q$

takže se jedná o osovou souměrnost

pokud zvolíme počátek na ose souměrnosti $2y = q \Rightarrow q = 0$

a jedná se o os. souměrnost podle přímky $y = 0$ (osa x)

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$$

$p \neq 0 \Rightarrow$ neex. samodr. bod

soustava nemá řešení

co se stane s přímkou $y = \frac{q}{2}$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ q/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+p \\ -q/2+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+p \\ q/2 \end{pmatrix}$$

$2y = q$ je samodružná přímka

body přímky ($y = q/2$) se zobrazí opět na tutéž přímku, jen se po této přímce posunou o p

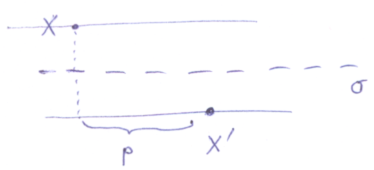
zvolme počátek na ní $\Rightarrow q = 0$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$$

je to složení osové souměrnosti $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X$

a posunutí $X' = X + \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ ve směru osy souměrnosti

naz. posunutá souměrnost



tabulka str. 68

bez použití souřadnic: shodnost zadána, jsou-li zadány obrazy vrcholů $\triangle ABC$

když mám zadány jen obrazy A', B' $\Rightarrow$ $\exists$ právě 2 možnosti $\left\langle \begin{array}{l} \text{shodnost přímá} \\ \text{nepřímá} \end{array}\right.$

tyto 2 možnosti: 2 $\triangle$ souměrné podle $A'B'$

takže se redukuje na diskuzi obrazů 2 bodů A, B

Klasifikace shodností v $\mathbb{E}_2$

	Žádný samodružný směr	Právě dva navzájem kolmé samodružné směry	Každý směr samodružný
Žádný samodružný bod	–	posunutá souměrnost $x' = x + p$ $y' = -y$ $p \neq 0$	posunutí, ne identita $x' = x + p$ $y' = y + q$ $(p, q) \neq (0, 0)$
Právě jeden samodružný bod	otočení o úhel α $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $\sin\alpha \neq 0$	–	středová souměrnost $x' = -x$ $y' = -y$
Přímka samodružných bodů; ne identita	–	osová souměrnost $x' = x$ $y' = -y$	–
Každý bod je samodružný	–	–	identita $x' = x$ $y' = y$

Klasifikace shodností v $\mathbb{E}_3$

	Pouze jeden samodružný směr	Jeden samodružný směr a dále je samodružný každý směr k němu kolmý	Každý směr samodružný
Žádný samodružný bod	otočení kolem přímky složené s posunutím ve směru té přímky $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $z' = z + r,\ r \neq 0,$ $\sin\alpha \neq 0$	souměrnost podle roviny složená s posunutím ve směru té roviny $x' = x + p$ $y' = y + q$ $z' = -z,\ (p, q) \neq (0, 0)$ nebo souměrnost podle přímky složená s posunutím ve směru té přímky $x' = -x,\ y' = -y$ $z' = z + r,\ r \neq 0$	posunutí (neidentické) $x' = x + p$ $y' = y + q$ $z' = z + r$ $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$
Pouze jeden samodružný bod	otočení kolem přímky složené se souměrností podle roviny kolmé na přímku $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $z' = -z,\ \sin\alpha \neq 0$	–	středová souměrnost $x' = -x$ $y' = -y$ $z' = -z$
Přímka samodružných bodů, žádné další samodružné body	otočení kolem přímky $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $z' = z,\ \sin\alpha \neq 0$	souměrnost podle přímky $x' = -x,\ y' = -y$ $z' = z$	–
Rovina samodružných bodů, žádné další samodružné body	–	souměrnost podle roviny $x' = x,\ y' = y,$ $z' = -z$	–
Všechny body samodružné	–	–	identita $x' = x,\ y' = y,\ z' = z$

7. Klasifikace shodností E_3

shodnost $f: X \mapsto X'$ $\quad X' = AX + B$, $AA^T = E$

samodružné směry: $\det(A - \lambda E) = 0$ je kubická rovnice $\Rightarrow \exists$ reálný kořen λ_0

tj. $\exists \vec{u} \neq \vec{o}$; $\bar{f}(\vec{u}) = \lambda_0 \vec{u}$

f shodnost $\Rightarrow \|\vec{u}\| = \|\bar{f}(\vec{u})\| = \|\lambda_0 \vec{u}\| = |\lambda_0| \cdot \|\vec{u}\| \Rightarrow |\lambda_0| = 1$ $\quad \lambda_0 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

zvolme KSS; $\vec{u} = (0,0,1)$ $\quad \bar{f}(\vec{u}) = (0,0,\lambda_0)$

$$A\vec{u} = A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}}_{\text{poslední sloupec } A} = \begin{pmatrix}0\\0\\\lambda_0\end{pmatrix} \quad \text{tj. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = E \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \lambda_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & & \\ & a_{21}^2 + a_{22}^2 & \\ & & \underbrace{a_{31}^2 + a_{32}^2 + \lambda_0^2}_{=1} \end{pmatrix}$$

$\lambda_0^2 = 1 \Rightarrow a_{31}^2 + a_{32}^2 = 0$

$a_{31} = 0 = a_{32}$

tj. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

$AA^T = E \Leftrightarrow A_0 \cdot A_0^T = E$, kde $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

převedeno na klasifikaci shodností v rovině

A_0 může nabývat tvarů: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

E_2	neboli pro $\sin\alpha \neq 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	$\alpha = 0$ id. (příp. posunutí)	$\alpha = \pi$ středová souměrnost	otočení	osová souměrnost (příp. posunutá souměrnost)

v E_3: $\left(\begin{array}{c|c} A_0 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \hline 0\ 0 & 1 \end{array}\right)$ nebo $\left(\begin{array}{c|c} A_0 & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ \hline 0\ 0 & -1 \end{array}\right)$ tedy 8 možností

tabulka: viz str. 72

$-1 \ldots$ souměrnost

stejný typ shodnosti dává: $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

stačí zaměnit osy: y a z, resp. x a z

$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ středová souměrnost

střed? je samodružný, tj. $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2s_1 \\ 2s_2 \\ 2s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ tj. $S = [\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, \frac{1}{2}b_3]$