2.8. Podobné zobrazení. Grupa podobností

Def. 1. $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$

f podobné zobrazení — $\exists k>0;\ \forall X,Y \in \mathbb{E}: \ |f(X)f(Y)| = k\,|XY|$

$k \ldots$ koeficient podobného zobrazení f

shodné zobr. je podobné zobr. s $k=1$

- Shodné zobr. je prosté. důk. stejně jako u shodných zobr.

Příklady

- stejnolehlost $\mathbb{E}$ na sebe $\quad X' = S + \lambda(X-S)$

  $S \ldots$ střed stejnolehlosti

  $\lambda \ldots$ koef. –"– , $\lambda \neq 0$

  je podobné zobr.: $|X'Y'| = \|\cancel{S} + \lambda(Y-S) - \cancel{S} - \lambda(X-S)\| =$

  $= |\lambda| \cdot \|Y-X\| = |\lambda| \cdot |XY|$

  stejnolehlost s koef. λ je podobné zobrazení s koef. $|\lambda|$

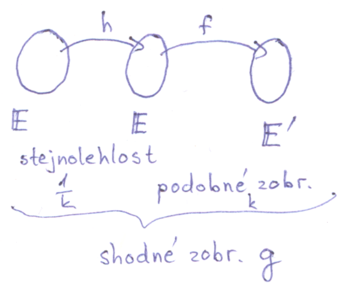
- $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ podobné zobr. s koef. $k>0$

  ($k=1 \Rightarrow f$ je shodné zobr.)

  $k \neq 1$ vezměme lib. stejnolehlost h prostoru $\mathbb{E}$ s koef. $\lambda = \frac{1}{k}$

  $f \circ h = ?$ $\quad \|f(h(X)) - f(h(Y))\| = k \cdot \|h(X) - h(Y)\| = k \cdot \frac{1}{k} \cdot \|X-Y\| = \|X-Y\|$

  tj. $f \circ h$ je shodné zobr. $\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$



stejnolehlost h je prostá a na $\Rightarrow \exists\, h^{-1} \ldots$ je stejnolehlost s koef. k a týmž středem

$g = f \circ h$

$\boxed{g \circ h^{-1} = f}$, tj.:

V1/ Každé podobné zobr. $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ lze složit ze stejnolehlosti prostoru $\mathbb{E}$ s koef. k a shodného zobr. $\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$.

- nebo jej také lze složit ze shodného zobr. $\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ a stejnolehlosti prostoru $\mathbb{E}'$

$\left.\begin{array}{l}\text{stejnolehlost} \\ \text{podobné zobr.}\end{array}\right\}$ známe, jsou afinní zobr.

shodné

tj. i jejich složení:

V2/ Každé podobné zobr. je afinní.

určenost afinního zobr. – také známe: podmínku podobnosti stačí ověřit pro $n+1$ LNZ bodů

V3/ $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{E}_n$ LNZ

$P_0', P_1', \ldots, P_n' \in \mathbb{E}'$

af. zobr. $f: \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}'$; $f(P_i) = P_i'$, $i = 0,1,\ldots,n$ je podobné $\Leftrightarrow \exists k>0;\ \forall i,j = 0,1,\ldots,n:$

$|P_i'P_j'| = k \cdot |P_iP_j|$

- Jak vypadá analytické vyjádření podobného zobr. ?

zvolme v E_n a E'_m KSS $\quad f$ … afinní zobr. $E_n \to E'_m$

$f: X \mapsto X' \quad X' = AX + B$

f podobné — lze jej složit ze stejnolehlosti h (zvolme střed v počátku) a ze shodného zobr. $E_n \to E'_m$ g

$f = g \circ h$

$A = G \cdot H \quad$ stejnolehlost: $H = k \cdot E$

shodné zobr.: $GG^T = E$

$$\Rightarrow AA^T = G \cdot \underbrace{H \cdot H^T}_{k^2 E} G^T = k^2 \underbrace{GG^T}_{E} = k^2 \cdot E$$

tj. $\boxed{AA^T = k^2 E_n}$

snadno tedy rozhodneme, zda je zadané zobr. podobné

- Grupa podobností

složení dvou podobných zobr.: $A_1 \cdot A_2$

$$A_1 \cdot \underbrace{A_2 \cdot A_2^T}_{k_2^2 E} \cdot A_1^T = k_2^2 \cdot A_1 A_1^T = \underbrace{k_1^2 k_2^2}_{= k^2} \cdot E$$ je podobné zobr.

asoc. – platí

id — $k=1$, $A=E$ je podobné zobr. $\quad \boxed{k = k_1 \cdot k_2}$

podobná zobr. jsou prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$

omezíme se na *na* – dostaneme grupu

na: naz. podobnost

Def. 2 podobnost — podobné zobr. $E \xrightarrow{\text{na}} E$ automaticky

E *na* sebe

grupa podobností prostoru E — všechny podobnosti tvoří při skládání grupu

vlastní podobnost — podobnost, která není shodnost ($k \neq 1$, nelze vynechat stejnolehlost v $f = g \circ h$)

- samodružné body a směry vlastních podobností ?

V4/ Každá vlastní podobnost má právě 1 samodružný bod.

důk. nemá jich více: pokud by měla, např. $A, B \Rightarrow |AB| = |f(A) f(B)|$ tj. $k=1$ a není to vlastní podobnost
je to shodnost

má samodr. bod – spočítáme jej

$X = AX + B$, $AA^T = k^2 E$

$(E - A)X = B$

$\exists!$ řeš. $\Leftrightarrow \det(E-A) \neq 0$ $\quad$ kdyby $\det(A-E)=0 \Rightarrow \lambda = 1$ by bylo vl. číslo a $\exists \vec{u} \neq \vec{o}$; $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{u}$

$\vec{u} = Y_0 - X_0$

tj. $\det(E-A) \neq 0$

$\|Y_0 - X_0\| = \|f(Y_0) - f(X_0)\|$ tj. opět $k=1$

spor – f má být vlastní podobnost

$\exists!$ samodr. bod $X = (E-A)^{-1} B$

V4a/ Podobnost s koef. k má vlastní čísla pouze k nebo $-k$.

důk. jako u shodnosti: 1 nebo −1 $\quad \vec{u} = Y_0 - X_0$

máme totiž z def. podobnosti: $\|\vec{f}(\vec{u})\| = \cancel{\|A\vec{u}\|} = \|f(Y_0) - f(X_0)\| = k \cdot \|Y_0 - X_0\| = k \cdot \|\vec{u}\|$ $\forall \vec{u}$, tj. i pro vlastní vektory

- podobnosti eukleidovské roviny

podobnost s koef. k můžeme složit ze stejnolehlosti s koef. k a lib. středem (např. v počátku soustavy souřadnic) a ze shodnosti

stejnolehlost: $x' = kx$, $y' = ky$ $\quad X' = kX$

shodnost: $X' = A_0 X + B$, kde: $A_0 = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \end{cases}$ $\quad B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

podobnost je tedy dána rovnicemi: $X' = k \cdot E \cdot \cancel{AX} \overset{+B}{} = k \cdot A_0 X + B = $

$\begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} X + B$ podobnost přímá

$\begin{pmatrix} k\cos\alpha & k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & -k\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} X + B$ podobnost nepřímá

$k = \sqrt{|\det A|} = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\qquad (a, b) \neq (0, 0)$

máme-li zadány A, B, A', B' $\Rightarrow \exists!$ přímá a nepřímá shodnost; $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$

důk. jako u shodností

Př. všechny podobnosti E_2; $[1,0] \mapsto [4,-2]$, $[2,3] \mapsto [2,-8]$

přímá podobnost: $X' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} X + B$ $\qquad$ nepřímá ~~sho~~ podobnost: $X' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} X + B$

$X' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ dosadíme zadané body a obrazy

dostaneme 4 rov. o 4 nezn. a, b, p, q

- vlastní podobnosti E_2

každá vlastní podobnost $\exists!$ samodr. bod – zvolme jej za počátek soustavy souřadnic $\Rightarrow$ přímá / nepřímá podobnost $X' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} X$ / $X' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} X$

$0 \neq a^2 + b^2 \neq 1$

– přímá podobnost:

$\det(A - \lambda E) = 0$, tj. $\begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2 = 0$

nemá reálný kořen, nejsou vlastní vektory

pro $b \neq 0$ podobnost je složením stejnolehlosti se středem S v samodr. bodě (v počátku) a otočení kolem S o úhel α, $\cos\alpha = \frac{a}{k}$, $\sin\alpha = \frac{b}{k}$, kde $k = \sqrt{a^2 + b^2}$

viz matice nahoře na stránce

pro $b = 0$ je tato přímá shodnost stejnolehlost

– nepřímá podobnost:

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{vmatrix} = -(a-\lambda)(a+\lambda) - b^2 = -(a^2 - \lambda^2) - b^2 = \lambda^2 - (a^2 + b^2) = \lambda^2 - k^2 = 0$ $\qquad \lambda_{1,2} = \pm k$

2 samodr. směry, zvolme

směry os x, y v těchto samodr. směrech $\Rightarrow b = 0$, $X' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} X$ $\qquad$ složení stejnolehlosti a osové souměrnosti

$0 \neq a \neq 1$

tj.:

V5/ každá vlastní podobnost E_2 je:
- buď – stejnolehlost
- buď – stejnolehlost složená s otočením kolem středu stejnolehlosti
- nebo – stejnolehlost složená s osovou souměrností, jejíž osa prochází středem stejnolehlosti

---

- V E_2 2 nestejně dlouhé úsečky AB, $A'B'$ $\Rightarrow \exists!$ přímá a $\exists!$ nepřímá ~~shodnost~~ podobnost; $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ $\quad k = \frac{|A'B'|}{|AB|} \neq 1$ je to vlastní podobnost

vlastní podobnost $\Rightarrow \exists!$ samodr. bod X $\quad \underbrace{\frac{|A'X|}{|AX|} = k}_{\text{Apolloniova kružnice } k_1} \underbrace{= \frac{|B'X|}{|BX|}}_{\text{Apoll. kružnice } k_2}$ pro $X \neq A$, $X \neq B$ (což máme, pokud $A \neq A'$, $B' = B$)

$\exists\, k_1 \cap k_2$, protože $\forall$ vlastní podobnost má samodružný bod

pokud se kružnice protínají ve 2 bodech $\Rightarrow$ jeden je samodr. bodem přímé podobnosti, druhý nepřímé

2.9. Přehled geometrických zobrazení

str. 81

$X' = AX + B$

zachovává:

afinita $\det A \neq 0$ >0 přímá afinita <0 nepřímá $|\det A| = 1$ ekviafinita — kolineárnost, dělicí pom.

podobnost $AA^T = k^2 E$ $\det A > 0$ přímá <0 nepřímá — poměr vzdáleností

shodnost $AA^T = E$ >0 <0 — vzdálenost

>0 zachovává, <0 mění orientaci repéru

homothetie $A = \lambda E$ všechny směry samodr.

– středová souměrnost $A = -E$

– translace $A = E$ všechny vektory samodr.

(identita: $A = E$, $B = 0$)

- Ekviafinity zachovávají objem

v $\mathbb{E}_n$ KSS, repér $R = \langle P; \underbrace{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n}_{B} \rangle$ jiná báze: $\langle \underbrace{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n}_{B'} \rangle$

$\underset{B}{V_n} \xleftarrow{P_{B'B}} \underset{B'}{V_n}$ $\langle \vec{v} \rangle_B = P_{B'B} \langle \vec{v} \rangle_{B'}$

objem rovnoběžnostěnu B': $|\det B'|$ $\underbrace{B^{-1}}_{E} \cdot B'$

$\bar{f}(\vec{u}_1), \dots, \bar{f}(\vec{u}_n)$ ... rovnoběžnostěn po zobrazení

$A \cdot \vec{u}_1, \dots, A \cdot \vec{u}_n$ $|\det(A \cdot B')| = \underbrace{|\det A|}_{=1 - \text{ekviafinita}} \cdot |\det B'|$ => objem je $|\det B'|$ před i po zobrazení

je tedy zachován

- Grupa:

$\{\mathrm{Id}\} \subset$ Translací $\subset$ Shodností $\subset$ Podobností $\subset$ Afinit