10. Inverze

v rovině: kruhová inverze

v prostoru: sférická inverze

Def. 1 Inverze v EP $\mathbb{E}$ se středem S a koef. $k \neq 0$ — zobr. $\mathbb{E} \setminus \{S\}$ na sebe; $X \mapsto X'$;

a) polopřímky SX, SX' jsou totožné při $k > 0$
opačné při $k < 0$

b) $|SX'| = \dfrac{|k|}{|SX|}$

↖ vztah nepřímé úměrnosti (není „lineární", není afinní zobr.)

- inverze je jednoznačně určena svým středem S a jednou dvojicí A, A' (bodu $\neq S$ a jeho obrazu)

- analytické vyjádření inverze

z a) v def. $\Rightarrow$ $X' - S = \alpha(X - S)$

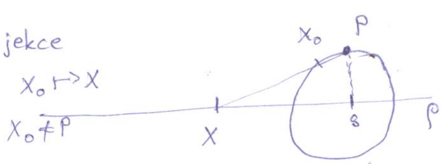
$\alpha = ?$ tj. $|X'S| = |\alpha| \cdot |XS|$ a z b): $|SX'| = \dfrac{|k|}{|SX|}$

$|\alpha|\,|SX| = \dfrac{|k|}{|SX|}$ $\qquad |\alpha| = \dfrac{|k|}{|SX|^2}$

$$\boxed{X' - S = \frac{k}{|SX|^2}(X - S)}$$

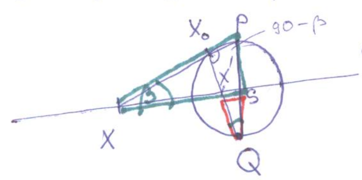
- názorná představa pomocí stereografické projekce

stereografická projekce sféry na rovinu: $X_0 \mapsto X$
$X_0 \neq P$



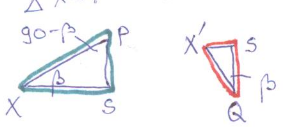
užití v kartografii
je konformní (zachovává velikost úhlů)

lze i stereogr. projekci z bodu Q – diametrálně protilehlého bodu k P



a) polopřímky $\overrightarrow{SX}$ a SX' jsou totožné

$\triangle XSP \sim \triangle QSX'$



$\dfrac{|SX|}{|SQ|} = \dfrac{|SP|}{|SX'|}$ $\qquad |SP| = |SQ| = r$

b) $|SX| \cdot |SX'| = r^2$

tj. • každou kruhovou inverzi s $k > 0$ lze dostat jako složení inv. zobr. k stereogr. proj. z bodu P a stereogr. proj. z bodu Q.

• pro $k < 0$ vše funguje stejně, jen pak ještě obrazy zobr. se středovou souměrností se středem S

- vlastnosti inverze

— je vždy involutorní: v def. je vše symetrické vzhl. k X, X'
záměnou X a X' se v ní vůbec nic nezmění

— vztah vzdáleností $|XS|, |X'S|$: nepřímá úměrnost (přímá úměrnost je u stejnolehlosti)

— obraz středu inverze není def.
blíží-li se bod X k S, pak $|X'S|$ roste nade všechny meze
přidejme tedy nekonečno

Def. 2 Möbiův n-rozměrný prostor — $\underset{\text{množina}}{M_n} = \mathbb{E}_n \cup \{\infty\}$

každou inverzi $\mathbb{E}_n$ dodefinujeme: obrazem středu inverze je bod ∞
bodu ∞ je střed inverze

∞ — tzv. nevlastní bod
považujeme jej za bod, který leží v každé nadrovině prostoru E_n
ve vnější oblasti každé sféry

vlastní body prostoru M_n — body prostoru E_n

sféra v $\mathbb{E}_n$ o středu S a poloměru $\underset{r>0}{r}$:— $\{X \in \mathbb{E}_n ;\ |XS| = r\}$

někdy pro $n>3$: nadsféra (jako ~~nap~~ analogie rovina – nadrovina)

sféra v rovině – kružnice

- můžeme se omezit na inverze s $k>0$

inverze s $k<0$ a středem S = inverze s $|k|$ a stř. S a složená se středovou soum. se středem S podle středu S

V1/ Sférická inverze se středem S a koef. k zobrazuje vnitřní oblast sféry o středu S a poloměru $\sqrt{|k|}$ na její vnější oblast a vnější oblast na vnitřní.

Sféra sama je samodružná. — pro $k>0$ je každý její bod samodružný
— pro $k<0$ se každý její bod zobrazí na bod diametrálně protilehlý.

důk. z def. inverze

$$|SX| \cdot |SX'| = |k| \qquad |SX| = \sqrt{|k|} \Rightarrow |SX'| = \sqrt{|k|}$$
$$> \qquad \Rightarrow \qquad < \qquad \text{z nepřímé úměrnosti}$$
$$< \qquad \Rightarrow \qquad >$$

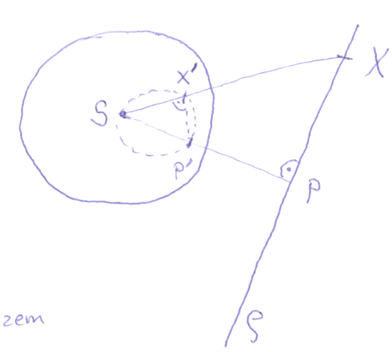
V2/ 1. Nadrovina procházející středem S inverze je samodružná.

2. Obrazem nadroviny, která neprochází středem inverze, je sféra, která prochází středem inverze.

důk. 1. přímo z definice inverze

2. ρ ... nadrovina neprocházející $\underbrace{\text{středem inverze}}_{S \notin \rho}$

v rovině: ρ je přímka



- vezměme bod $P \in \rho$; $SP \perp \rho$

sestrojíme P' ... obraz bodu P v inverzi

nad průměrem SP' sestrojíme Thalétovu kružnici (tečkovaně)

ta je obrazem přímky ρ

- obraz bodu $X \in \rho$:

spojnice SX protne kružnici (Thal.) v bodě X'

vzniknou 2 pravoúhlé trojúhelníky: $\triangle SPX \sim \triangle SX'P'$

jsou podobné dle uu: pravý úhel, úhel při S mají společný

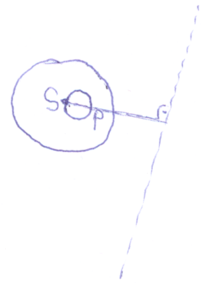
z podobnosti: $$\frac{|SX|}{|SP|} = \frac{|SP'|}{|SX'|} \Rightarrow |SX| \cdot |SX'| = \underbrace{|SP| \cdot |SP'|}_{\text{konst.}}$$

tj. X' je obrazem bodu X v inverzi

tj.: obrazy všech bodů $X \in \rho$ leží na kružnici (tečkovaná Thalétova kružnice) procházející středem inverze z V2 (2.) plyne V3/1.:

V3/1./ obrazem sféry procházející středem inverze je nadrovina neprocházející středem inverze

důk. z involutornosti inverze a z V2/2.



2D: tato nadrovina je přímkou, která je kolmá na průměr SP kružnice procházející středem inverze S

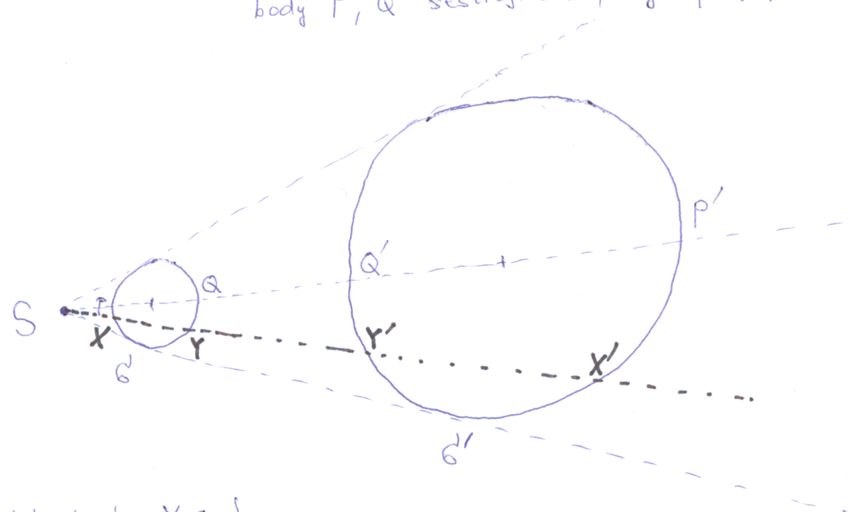
bod P ... bod kružnice, který je nejvíce vzdálen od S

V3/2./ obrazem sféry neprocházející středem inverze σ je sféra neprocházející středem inverze σ'

důk. pouze pro $k > 0$ (pro $k < 0$ analogicky)

v rovině nekreslíme řídicí kružnici inverze (aby nebylo moc kružnic)

- zadána kružnice σ s průměrem PQ, body S, P, Q leží v 1 přímce
  sestrojme kružnici σ' s ní stejnolehlou (se středem S)
  s průměrem $P'Q'$, body S, P', Q' leží v 1 přímce
  body P', Q' sestrojme tak, aby $|SP| \cdot |SP'| = |SQ| \cdot |SQ'|$ (tj. P', Q' sestrojme jako obrazy P, Q v zadané inverzi)



ve stejnolehlosti:

$P \mapsto Q'$

$Q \mapsto P'$

v inverzi:

$P \mapsto P'$

$Q \mapsto Q'$

- obraz lib. bodu $X \in \sigma$
  veďme lib. sečnu (obou) kružnic procházející středem inverze S
  - z mocnosti bodu S ke kružnici σ:

$$|SX| \cdot |SY| = |SP| \cdot |SQ|$$

  - ze stejnolehlosti kružnic σ, σ':

$$\frac{|SX'|}{|SY|} = \frac{|SP'|}{|SQ|}$$

vynásobme $\Rightarrow$ $|SX| \cdot |SX'| = \underbrace{|SP| \cdot |SP'|}_{\text{konst. vzhledem k } X}$

$\Downarrow$

tj. obraz bodu X je v inverzi bod X' (ležící na stejnolehlé kružnici)

tj. obrazem σ v inverzi je σ'

analytické vyjádření inverze: $X' = S + \frac{k}{|XS|^2}(X-S)$

- inverze není podobné zobr., vzdálenost $|XY|$ se změní takto:

$$|X'Y'|^2 = \|Y'-X'\|^2 = \left\|\frac{k}{|YS|^2}(Y-S) - \frac{k}{|XS|^2}(X-S)\right\|^2 = k^2\cdot\left[\frac{1}{|YS|^4}(Y-S)^2 - \frac{2(Y-S)(X-S)}{|YS|^2\,|XS|^2} + \frac{(X-S)^2}{|XS|^4}\right] =$$

$$= k^2\left[\frac{1}{|YS|^2}+\frac{1}{|XS|^2} - \frac{|XS|^2+|YS|^2-|XY|^2}{|YS|^2\,|XS|^2}\right] = k^2\,\frac{|XY|^2}{|XS|^2\cdot|YS|^2}$$

$$2\,\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$$

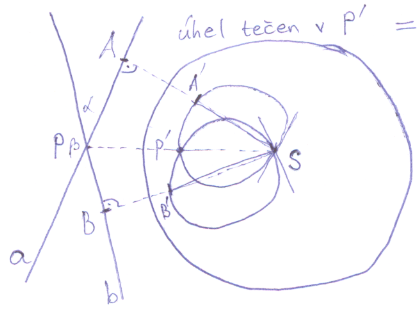
tj. $|X'Y'| = \frac{|k|}{|XS|\cdot|YS|}\cdot|XY|$

- inverze je konformní zobrazení – zachovává velikost úhlů

2 různoběžky a, b $\quad a\cap b = P$ $\quad P\neq S$, P vlastní bod

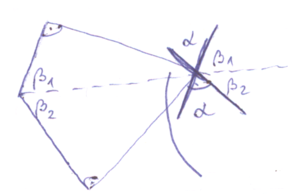
jejich obrazy: k_a, k_b – kružnice procházející bodem S a společným bodem P'

úhel tečen v P' = úhlu a, b = úhlu $\underbrace{\text{tečen v bodě } S}_{\text{jsou rovnoběžné s přímkami } a,\, b}$



$A'S$ – průměr k_a

$B'S$ – průměr k_b

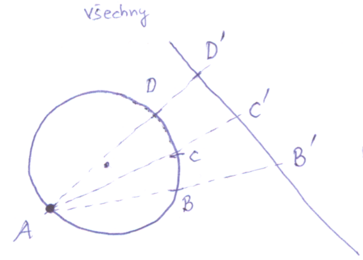


V4/ Ptolemaiova

$A, B, C, D \in E_2$ navzájem různé, neleží všechny na 1 přímce $\Rightarrow$ $|AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC| \geq |AC|\cdot|BD|$

rovnost nastává $\Leftrightarrow$ $ABCD$ je konvexní tětivový 4-úhelník

důk.



inverze se středem v A a koef. $k=1$

$$|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|$$

$$\frac{1}{|AB|\cdot|AC|}\cdot|BC| + \frac{1}{|AC|\cdot|AD|}\cdot|CD| \geq \frac{1}{|AB|\cdot|AD|}\cdot|BD| \quad \Big/\ |AB|\cdot|AC|\cdot|AD|$$

$$|AD|\cdot|BC| + |AB|\cdot|CD| \geq |AC|\cdot|BD|$$

11. Grupa sférických transformací

- složení dvou inverzí s týmž středem — je stejnolehlost

$$\boxed{X'' = S + \frac{k_1}{|SX'|^2}(X' - S)}$$

$$X' = S + \frac{k_2}{|SX|^2}(X - S)$$

složení (dosadíme do X'' za X'):

$$X'' = S + \frac{k_1}{|SX'|^2}(X' - S) = S + \frac{k_1}{|SX'|^2}\cdot\frac{k_2}{|SX|^2}(X - S) = S + \frac{k_1 k_2}{\frac{k_2^2}{\cancel{|SX|^2}}\cdot\cancel{|SX|^2}}(X - S) = \underline{\underline{S + \frac{k_1}{k_2}(X - S)}}$$

$$X' - S = \frac{k_2}{|SX|^2}(X - S) \qquad |SX'|^2 = \|X' - S\|^2 = \frac{k_2^2}{|SX|^4}\|X - S\|^2 = \frac{k_2^2}{|SX|^2}$$

- složení inverze a stejnolehlosti s týmž středem je opět inverze

ano: zobrazím a aplikací stejnolehlosti jen „protáhnu" či zmenším / zvětším

- Tj. inverze a stejnolehlosti s týmž středem tvoří grupu

ozn.: $(1, \lambda)$ stejnolehlost s koef. λ
$(-1, k)$ inverze k

$$(1, \lambda_1)\circ(1, \lambda_2) = (1, \lambda_1 \cdot \lambda_2)$$
$$(-1, k)\circ(1, \lambda) = \left(-1, \frac{k}{\lambda}\right)$$
$$(1, \lambda)\circ(-1, k) = (-1, k\lambda)$$
$$(-1, k_1)\circ(-1, k_2) = \left(1, \frac{k_1}{k_2}\right)$$

nekom. grupa

- složení dvou inverzí s různými středy:

hypotéza: 

$f_1 \dots S_1, k_1$ $\quad f_2 \dots S_2, k_2$ $\quad g: \dots \underbrace{f_2(S_1)}_{S_3}, 1$

$g\circ f_2\circ f_1 = ?$

$$F = g\circ f_2\circ f_1 \qquad g\circ g = id. \quad g = g^{-1}$$

$$g^{-1}\circ F = f_2\circ f_1$$

$$\boxed{f_2\circ f_1 = g\circ F}$$ — viz V1/

$$\begin{array}{ccccccc} & \xrightarrow{f_1} & & \xrightarrow{f_2} & S_3 & \xrightarrow{g} & \\ \infty & \to & S_1 & \to & f_2(S_1) & \to & \infty \\ S & \to & \infty & \to & S_2 & \to & g(S_2) \\ f_1(S_2) & \to & S_2 & \to & \infty & \to & f_2(S_1) = S_3 \end{array}$$

involuce

X, Y 2 lib. body $\neq S, f_1(S_2)$

$$X \xrightarrow{f_1} X' \xrightarrow{f_2} X'' \xrightarrow{g} X'''$$
$$Y \to Y' \to Y'' \to Y'''$$

$$|X'''Y'''| = \frac{1}{|S_3X''|\cdot|S_3Y''|}\cdot|X''Y''|$$

$$|S_3X''| = \frac{|k_2|}{|S_2X'|\cdot|S_2S_1|}\cdot|S_1X'|, \quad |S_3Y''| = \frac{|k_2|}{|S_2Y'|\cdot|S_2S_1|}\cdot|S_1Y'|, \quad |X''Y''| = \frac{|k_2|}{|S_2X'|\cdot|S_2Y'|}|X'Y'|$$

$$|X'Y'| = \frac{|k_1|}{|S_1X|\cdot|S_1Y|}\cdot|XY|$$

$$\text{Tj. } |X'''Y'''| = \frac{1}{\frac{|k_2|}{|S_2X'|\cdot|S_1S_2|}|S_1X'|\cdot\frac{|k_2|}{|S_2Y'||S_1S_2|}|S_1Y'|}\cdot|X''Y''| =$$

$$= \frac{|S_2X'|\cdot|S_2Y'|\cdot|S_1S_2|\cdot|X''Y''|}{|S_1X'|\cdot|S_1Y'|\cdot k_2^2} = \frac{\cancel{|S_2X'||S_2Y'|}\cdot|S_1S_2|\cdot|k_2|\cdot|X'Y'|}{|S_1X'|\cdot|S_1Y'|\cdot k_2^2\,\cancel{|S_2X'||S_2Y'|}} = \frac{|S_1S_2|\cdot|k_1|\cdot|XY|}{|k_2|\cdot\underbrace{|S_1X'|\cdot|S_1Y'|\cdot|S_1X|\cdot|S_1Y|}_{k_1 \quad k_1}} =$$

$$= \frac{|S_1S_2|\cdot|XY|}{|k_2|\cdot|k_1|}$$ — tj. F podobnost s koef. $\frac{|S_1S_2|}{|k_1|\cdot|k_2|}$

V1/ Složením dvou inverzí s různými středy je zobr., které je složením podobnosti a inverze.

$$f_2 \circ f_1 = g \circ F$$

V1/ Složením dvou inverzí s různými středy je zobrazení, které je složením podobnosti a inverze.

- prošetřeno složení dvou inverzí; jak spolu funguje složení inverze a podobnosti?

V2/ p podobnost s koef. k

i_1 inverze se středem S a koef. k_1 $\quad \Longrightarrow \quad p \circ i_1 = i_2 \circ p$, pokud $k_2 = k^2 \cdot k_1$

i_2 inverze se středem $p(S)$ a koef. k_2

důk.

$$i_2(p(X)) = p(S) + \frac{k_2}{|p(S)\,p(X)|^2} \cdot \big(p(X) - p(S)\big) = p(S) + \frac{k_2}{k^2 \cdot |SX|^2}\big(p(X) - p(S)\big)$$

inverze obecně: $X' = S + \frac{k}{|SX|^2}(X - S)$

$$p(i_1(X)) = p\left(S + \frac{k_1}{|SX|^2}(X - S)\right) = p(S) + \frac{k_1}{|SX|^2}\big(p(X) - p(S)\big)$$

$\frac{k_2}{k^2} = k_1$ tj. $k_2 = k^2 \cdot k_1$

... cbd.

pro ~~nekonečna~~ nevlastní bod také projde

Def. 1 sférická transformace prostoru M_n — transformace M_n, která je buď podobnost, složení podobnosti a sférické inverze

vlastní sférická transformace — zobrazení složené z inverze a podobnosti

$n = 2$: (vlastní) kruhová transformace

V3/ Všechny sférické transformace prostoru M_n tvoří vzhl. ke skládání grupu — tzv. grupu sférických transformací.

důk. $p_1 \circ p_2$ --- podobnost $\Big\}$ jsou podobnosti, $\exists$ inv.

$i_1 \circ i_2$ — stejný střed — stejnolehlost; různé středy — $i \circ p$

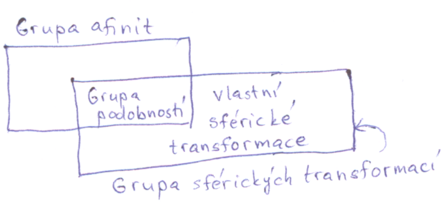
$i = i \circ id$ (také podobnost) $\qquad (i \circ p)^{-1} = ?\ \exists ?$ $\qquad i^{-1} = i$ (involuce); $\exists p^{-1}$ ... podobnosti tvoří grupu

$$(i \circ p) \circ \underbrace{(p^{-1} \circ i^{-1})}_{\text{lze psát jako složení podobnosti a sfér. inverze}} = i \circ id \circ i^{-1} = id$$

— převrácení pořadí zajistí V2

Pozn. Grupa sfér. transformací je nejmenší grupa obsahující všechny sfér. inverze.

Rozšíříme afinitu na M_n : položme $f(\infty) = \infty$



rozklad vlastní sférické ~~inverze~~ transformace na podobnost a sférickou inverzi není jednoznačný

(podobně např. není jednoznačný rozklad vlastní podobnosti na shodnost a stejnolehlost)

12. Transformace roviny v komplexní souřadnici

v $\mathbb{E}_2$ KSS vzájemně jednoznačné zobr. $\mathbb{E}_2 \to \mathbb{R}^2$ $X \mapsto [x,y]$ dvojice $[x,y]$ jednoznačně určuje komplexní číslo $z = x+iy$

máme tedy bijekci $\mathbb{E}_2 \to \mathbb{C}$ $X=[x,y] \mapsto z = x+iy$

číslo z je komplexní souřadnice bodu X místo o bodu X také někdy mluvíme o bodu z

$z = x+iy$ $\bar{z} = x-iy$ $z+\bar{z} = 2x$ $z-\bar{z} = 2iy \;/\cdot \frac{i}{2}$

$x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ $i(z-\bar{z}) = -2y$

$X=[x,y]$ $z=x+iy$ $\frac{i}{2}(\bar{z}-z) = y$

$W=[u,v]$ $w=u+iv$

$|XW| = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2} = |z-w|$ – vyjádření vzdálenosti dvou bodů pomocí jejich komplexních souřadnic

Analytická vyjádření geometrických zobrazení afinní roviny do sebe v komplexní souřadnici

$x' = ax+by+p$
$y' = cx+dy+q$

$$z' = x'+iy' = (ax+by+p)+i(cx+dy+q) = (a+ic)x+(b+id)y+p+iq =$$

$$= (a+ic)\frac{1}{2}(z+\bar{z}) + (b+id)\frac{i}{2}(\bar{z}-z) + p+iq =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{a+d}{2} + i\,\frac{c-b}{2}\right)}_{\alpha} z + \underbrace{\left(\frac{a-d}{2} + i\,\frac{c+b}{2}\right)}_{\beta} \bar{z} + \underbrace{p+iq}_{\gamma} =$$

$$= \alpha z + \beta\bar{z} + \gamma \qquad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$$

z čísel α,β,γ lze zpátky dopočítat a,b,c,d,p,q

např. a:

$\alpha+\beta = a+ic$
$\bar{\alpha}+\bar{\beta} = a-ic$ $\Rightarrow a = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\bar{\alpha}+\bar{\beta})$ $p = \frac{1}{2}(\gamma+\bar{\gamma})$

tj. lze shrnout:

V1/ Každé afinní zobr. $\mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_2$ je v komplexní souřadnici dáno rovnicí $z' = \alpha z+\beta\bar{z}+\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$.

Zobrazení je afinita (tj. bij.) $\Leftrightarrow |\alpha| \neq |\beta|$

ekviafinita $\Leftrightarrow \left||\alpha|^2-|\beta|^2\right| = 1$

---

lze ověřit: $ad-bc = |\alpha|^2-|\beta|^2$

- kdy je afinita podobnost? $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a\end{pmatrix}$

přímá podobnost $a=d$ $-b=c$ tj. $\beta=0$

nebo

nepřímá podobnost $\Rightarrow a=-d$ $b=c$ tj. $\alpha=0$

$z' = \alpha z+\gamma$

$|w'-z'| = |\alpha w+\gamma-\alpha z-\gamma| = |\alpha|\cdot|w-z|$

koeficientem přímé podobnosti je $|\alpha|$

$z' = \beta\bar{z}+\gamma$

$|w'-z'| = |\beta|\cdot|w-z|$ $\Rightarrow$ koef. nepřímé podobnosti je $|\beta|$

přímá podobnost: $z' = \alpha z + \gamma$ s koef. $|\alpha|$ (tj. $|z'-w'| = |\alpha|\cdot|z-w|$)

je shodnost pro $|\alpha| = 1$, tj. $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$

nepřímá podobnost: $z' = \beta\bar{z} + \gamma$ s koef. $|\beta|$

je shodností (nepřímou) pro $|\beta| = 1$

$z' = \alpha z$, $|\alpha| = 1$ – otočení kolem počátku o úhel φ

$\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$ viz Moivreova věta $z = r(\cos\psi + i\sin\psi)$

$$\alpha z = \cancel{\xi}\mathrm{cis}\,\varphi \cdot r\cdot \mathrm{cis}\,\psi = r\cdot\mathrm{cis}\,\varphi\cdot\mathrm{cis}\,\psi =$$
$$= r\cdot\mathrm{cis}(\varphi+\psi) = r\left(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\right)$$

- Vyjádření kruhové inverze v komplexní souřadnici se středem $S = [s_1, s_2]$ a koef. k

$$x' = s_1 + \frac{k}{(x-s_1)^2 + (y-s_2)^2}(x-s_1)$$
$$y' = s_2 + \frac{k}{(x-s_1)^2 + (y-s_2)^2}(y-s_2)$$

položme $\sigma = s_1 + is_2$ $z = x+iy$ $z' = x'+iy'$

$$x' + iy' = \sigma + \frac{k}{(x-s_1)^2 + (y-s_2)^2}\left((x-s_1) + i(y-s_2)\right)$$

$$z' = \sigma + \frac{k}{|z-\sigma|^2}(z-\sigma) \qquad |w|^2 = w\cdot\bar{w}$$
$$a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib)$$

$$z' = \sigma + \frac{k}{\cancel{(z-\sigma)}(\bar{z}-\bar{\sigma})}\cancel{(z-\sigma)} = \sigma + \frac{k}{\bar{z}-\bar{\sigma}}$$

tj. $\boxed{z' = \sigma + \frac{k}{\bar{z}-\bar{\sigma}}}$, $k \neq 0$, $\in \mathbb{R}$

obrazem bodu σ je ∞ a obrazem ∞ je σ

- kruhová transformace

je buď podobnost, nebo je složením inverze a podobnosti

– $z' = \alpha z + \gamma$ $\alpha \neq 0$ $\infty \mapsto \infty$

– $z' = \alpha\left(\sigma + \frac{k}{\bar{z}-\bar{\sigma}}\right) + \gamma = \alpha\sigma + \gamma + \frac{\alpha k}{\bar{z}-\bar{\sigma}} =$

$$= \frac{\alpha\sigma\bar{z} + \gamma\bar{z} - \alpha\sigma\bar{\sigma} - \gamma\bar{\sigma} + \alpha k}{\bar{z}-\bar{\sigma}} = \frac{(\alpha\sigma+\gamma)\bar{z} + (\alpha k - \alpha\sigma\bar{\sigma} - \gamma\bar{\sigma})}{\bar{z}-\bar{\sigma}}$$

$\sigma \mapsto \infty$ $\infty \mapsto \alpha\sigma + \gamma$

– $z' = \beta\bar{z} + \gamma$ $\beta \neq 0$ $\infty \mapsto \infty$

– $z' = \beta\left(\bar{\sigma} + \frac{k}{z-\sigma}\right) + \gamma = \beta\bar{\sigma} + \gamma + \frac{\beta k}{z-\sigma} =$

$$= \frac{(\beta\bar{\sigma} + \gamma)z + \beta k - \beta\bar{\sigma}\sigma - \gamma\sigma}{z-\sigma}$$

$\sigma \mapsto \infty$ $\infty \mapsto \beta\bar{\sigma} + \gamma$

tj. každá kruhová transformace ~~rovinné~~ je v komplexní souřadnici dána lineární lomenou funkcí v z nebo v $\bar{z}$

přímá kruhová transformace $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ nebo nepřímá kruhová transformace $z' = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ $ad - bc \neq 0$

$c = 0 \Rightarrow$ přímá či nepřímá podobnost, $\infty \mapsto \infty$

$c \neq 0 \Rightarrow \infty \mapsto \frac{a}{c}$ $-\frac{d}{c} \mapsto \infty$

$-\frac{\bar{d}}{\bar{c}} \mapsto \infty$

a obráceně: lin. lomenou fcí v z nebo $\bar{z}$ je dána kruhová transformace